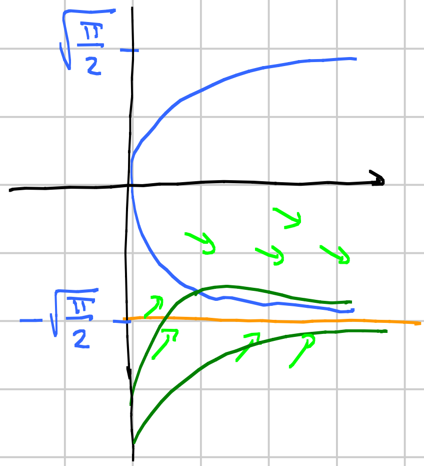
# SSSUP 2011 — LEZIONE 23

Titolo nota 31/05/2011

<u>Back to Lezione 20</u> $\quad u' = u^2 - \arctan t$

$u(0) < 0$




$u(t) \to -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ sempre (con $u(0) < 0$)

Lo può fare in modo monotono? No!

<u>Fatto 1</u> Se esiste $t > 0$ t.c. $u(t) \geq -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, allora $u$ dopo tocca e diventa monotona decrescente.

<u>Fatto 2</u> Supponiamo (per assurdo) che $u(t) \leq -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ per ogni $t \geq 0$. Allora

$$u'(t) = u^2(t) - \arctan t \overset{\text{Uso Hp}}{\geq} \frac{\pi}{2} - \arctan t = g(t) \qquad \forall\, t \geq 0$$

quindi $\quad u(t) - u(0) = \int_0^t u'(s)\, ds \geq \int_0^t g(s)\, ds$

Se dimostro che l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} g(s)\, ds = +\infty$, allora ho trovato un assurdo perché

$$\text{LHS} \leq -\sqrt{\frac{\pi}{2}} - u(0)$$

<u>Fatto 3</u> $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan t\right) : \frac{1}{t} = 1 \Rightarrow$ l'integrale diverge.

Per calcolare il limite ci sono 2 possibilità:

1ª – Hôpital

2ª – Usare l'uguaglianza $\frac{\pi}{2} - \arctan t = \arctan \frac{1}{t} \sim \frac{1}{t}$

L'uguaglianza, a sua volta, si dimostra o partendo da $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan \alpha}$ o studiando la funzione $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$

— o — o —

# Sistemi di equazioni differenziali

Caso di 2 equazioni lineari autonome omogenee del 1° ordine

$$\begin{cases} u' = au + bv \\ v' = cu + dv \end{cases}$$

Esempio 1 $\quad u' = 4u + v$

$\quad\quad\quad\quad\; v' = 3u + 2v$

Metodo terra-terra: cerco di ottenere una equazione nella sola u.
Prendo la 1ª equazione e la derivo

$$u'' = 4u' + v' \underset{\uparrow}{=} 4u' + 3u + 2v \underset{\uparrow}{=} 4u' + 3u + 2u' - 8u = 6u' - 5u$$

prendo v' da 2ª equazione

prendo v da 1ª eq.

Ho ottenuto l'equazione $u'' - 6u' + 5u = 0$

$x^2 - 6x + 5 = 0 \qquad x = 1, 5 \qquad \boxed{u(t) = c_1 e^t + c_2 e^{5t}}$

Una volta ottenuta u, ricavo v dalla 1ª equazione

$$v = u' - 4u = c_1 e^t + 5c_2 e^{5t} - 4c_1 e^t - 4c_2 e^{5t} = \boxed{-3c_1 e^t + c_2 e^{5t}}$$

La soluzione $(u(t), v(t))$ dipende da 2 parametri $c_1$ e $c_2$, univocamente determinabili sulla base di $u(t_0)$ e $v(t_0)$

Esercizio Provare a fare una procedura analoga con un sistema 3×3 (serve strada facendo la risoluzione di sistemi lineari 2×2).

— o — o —

Passo successivo: 1 e 5 sono autovalori di una matrice e

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}$$

autovettori relativi agli autoval. 1 e 5, rispettivamente.

Matrice associata al sistema: $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ traccia = somma autov = 6
det = prod. autov. = 5

Per un sistema $n \times n$ ci aspettiamo una soluzione generale della forma

$$U(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n v_n e^{\lambda_n t}$$

vettore di componenti $u_1(t), u_2(t), \dots$

dove
- $c_1, \dots, c_n$ sono parametri reali
- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori della matrice (supposti reali e distinti)
- $v_1, \dots, v_n$ sono i corrispondenti autovettori (linearmente indipendenti perché relativi ad autovalori distinti).

Se gli autovalori sono tutti reali, ma alcuni hanno molteplicità $>1$, allora "si mettono le $t$ davanti", ma non basta perché bisogna anche guardare gli autovettori ... (le $t$ servono solo quando l'autospazio ha dimensione inferiore alla molteplicità).

—o—o—

Perché tutto ciò funziona?

<u>Fatto 1</u> Una matrice con $n$ autovalori reali distinti è diagonalizz.

<u>Fatto 2</u> Se invece di usare la base canonica uso la base di autovettori il sistema diventa diagonale.

$$U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix} = u_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + u_2(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + u_n(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \hat{u}_1(t)\, v_1 + \hat{u}_2(t)\, v_2 + \dots + \hat{u}_n(t)\, v_n$$

dove $v_1, \dots, v_n$ sono gli autovettori e $\hat{u}_1(t), \dots, \hat{u}_n(t)$ sono i coeff. rispetto alla nuova base (si ottengono con la matrice di

cambio di base a partire da $u_1, \dots, u_n$).
Osservazione: la matrice che mi fa passare
$(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n) \to (u_1, \dots, u_n)$ è quella che ha i $v_i$ come colonne (so come deve agire quando c'è un 1 e tutti 0).
La matrice che fa il passaggio inverso è la matrice inversa.

Chiamo $M$ la matrice le cui colonne sono i $v_i$. Allora

$\hat{U}(t) = M^{-1} U(t)$, ma allora

$$\hat{U}'(t) = M^{-1} U'(t) = M^{-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matrice sistema}}}{A} U(t) = \underbrace{M^{-1} A M}_{\substack{\text{matrice nella} \\ \text{nuova base}}} \hat{U}(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matrice} \\ \text{diagonale}}}{D} \hat{U}(t)$$

Il sistema con matrice diagonale vuol dire

$$\begin{aligned} \hat{u}_1'(t) &= \lambda_1 \hat{u}_1(t) \\ \hat{u}_2'(t) &= \lambda_2 \hat{u}_2(t) \\ &\vdots \\ \hat{u}_n'(t) &= \lambda_n \hat{u}_n(t) \end{aligned}$$

è un sistema disaccoppiato, cioè sono $n$ equazioni singole

La sua soluzione banalmente è

$$\hat{U}(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n$$

scrittura nella base $v_1, \dots, v_n$

<u>Oss.</u> Se per ogni autovalore le molteplicità algebrica e geometrica coincidono, allora la matrice si diagonalizza ugualmente, ed il procedimento funziona ed il termine $e^{\lambda t}$ compare (senza $t$ aggiunte) tante volte quanta è la sua molteplicità (e davanti compare una qualunque base dell'autospazio).