SSSUP 2011 — LEZIONE 22

Titolo nota 10/05/2011

<u>Esempio 1</u> $\ddot{u} = -ku \qquad \ddot{u}\dot{u} = -ku\dot{u} \qquad \left[\frac{1}{2}\dot{u}^2\right]' = \left[-\frac{k}{2}u^2\right]'$

$$E(t) = \frac{1}{2}\dot{u}^2 + \frac{k}{2}u^2 = E(0) \qquad \dot{u} = \pm\sqrt{2E(0) - ku^2}$$

Prendo il segno +, cioè la parte di soluzione con $\dot{u} > 0$, cioè il tratto di soluzione tra il min ed il max.

$$\min, \max = \pm\sqrt{\frac{2E(0)}{k}}$$

Procedendo come prima trovo che

$$\frac{\text{Periodo}}{2} = \int_{\min}^{\max} \frac{dx}{\sqrt{2E(0) - kx^2}} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\dot{u}(t)}{\sqrt{2E(0) - ku^2(t)}}\, dt = t_2 - t_1$$

$u(t) = x$
$dx = \dot{u}(t)\, dt$

Calcolo l'integrale al LHS.

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \int_{-\sqrt{\frac{2E(0)}{k}}}^{+\sqrt{\cdots}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E(0)}{k} - x^2}} \qquad \text{Pongo} \quad x = \sqrt{\frac{2E(0)}{k}} \cdot y$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\cancel{\sqrt{\frac{2E(0)}{k}}}} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \cdot \underbrace{\cancel{\sqrt{\frac{2E(0)}{k}}}\, dy}_{dx} = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{-1}^{1} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

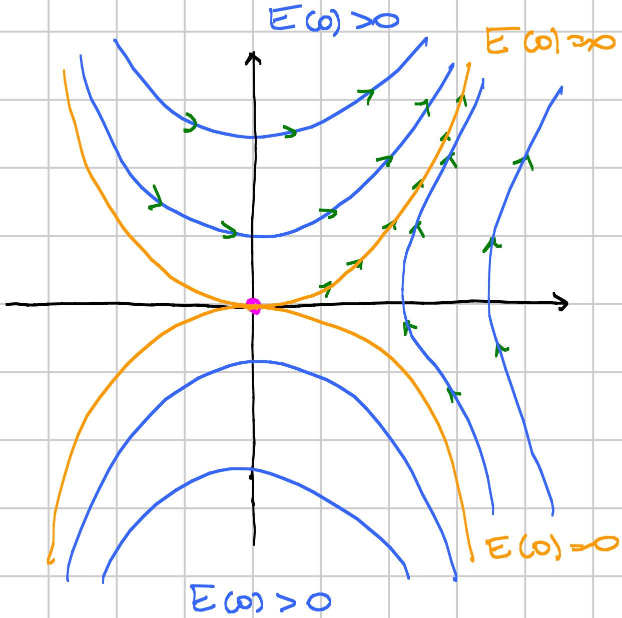
$$= \frac{1}{\sqrt{k}} \left[\arcsin y\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{\sqrt{k}} \quad \Rightarrow \quad \text{Periodo} = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}$$

indipendente da $E(0)$ come si vedeva dalla formula esplicita.

<u>Esercizio</u> Capire, nel caso di $\ddot{u} = -u^3$, come il periodo varia in funzione dell'energia

Esempio 2 $\quad \ddot{u} = u^3 \qquad \ddot{u}\,\dot{u} = u^3\,\dot{u} \qquad \left[\frac{1}{2}\dot{u}^2\right]' = \left[\frac{1}{4}u^4\right]'$

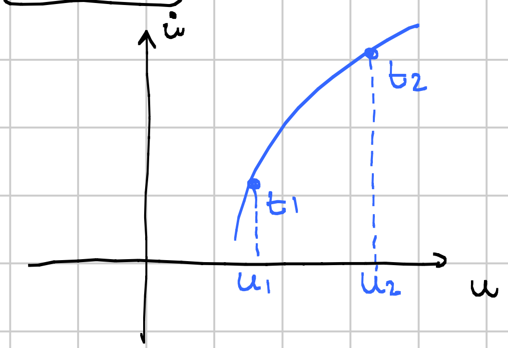
$$\frac{1}{2}\dot{u}^2 - \frac{1}{4}u^4 = E(0) \qquad \dot{u} = \pm\sqrt{2E(0) + \frac{1}{2}u^4}$$



In questo caso non ci sono soluzioni periodiche tranne quella stazionaria banale (0,0).
Le soluzioni lungo le parabole si possono trovare esplicitamente.

Domanda: c'è blow-up oppure no?

$\boxed{\text{1° modo}}$



$$\dot{u} = \sqrt{2E(0) + \frac{1}{2}u^4}$$

$$\frac{\dot{u}}{\sqrt{\cdots}} = 1 \qquad \int_{t_1}^{t_2} \frac{\dot{u}}{\sqrt{\cdots}}\,dt = t_2 - t_1$$

$$= \int_{u_1}^{u_2} \frac{dx}{\sqrt{2E(0) + \frac{1}{2}x^4}}$$

Poichè l'integrale improprio, ottenuto mandando $u_2 \to +\infty$, converge, so che $t_2 - t_1$ tende ad un numero e quindi la soluzione tende a $+\infty$ in un tempo finito, che stimo con l'integrale improprio.

$\boxed{\text{2° modo}}$ (In realtà è lo stesso) Prendo l'equazione del 1° ordine risolta da u ed osservo, studiandola qualitativamente, che c'è blow-up (il secondo membro cresce quadraticamente all'infinito).

Esercizio Capire $\ddot{u} = |u|^p \qquad \ddot{u} = -|u|^p$ al variare di $p > 0$.

Esempio 3 $\ddot u = -\sin u$

($\ddot u = -k \sin u$ è l'eq. vera del pendolo, senza fare finta che u = angolo con la verticale sia piccolo).

$$\dot u \ddot u = -\dot u \sin u$$

$$\left[\frac{1}{2} \dot u^2\right]' = [\cos u]'$$

$$E(t) = \frac{1}{2} \dot u^2 - \cos u = E(0)$$

Come sono fatte le curve nel piano $(u, \dot u)$?

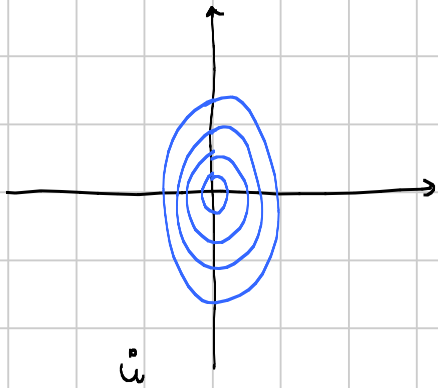
1ª oss: $\dot u$ è limitato. Questo già implica esistenza globale. Infatti u non può scoppiare in tempo finito (è Lip.), quindi no blow-up, e anche $\dot u$ non può scoppiare, quindi no break-down.

Visto come sistema $\begin{cases} \dot u = v \\ \dot v = -\sin u \end{cases}$ Le 2 funzioni al RHS sono sublineari in u e v.

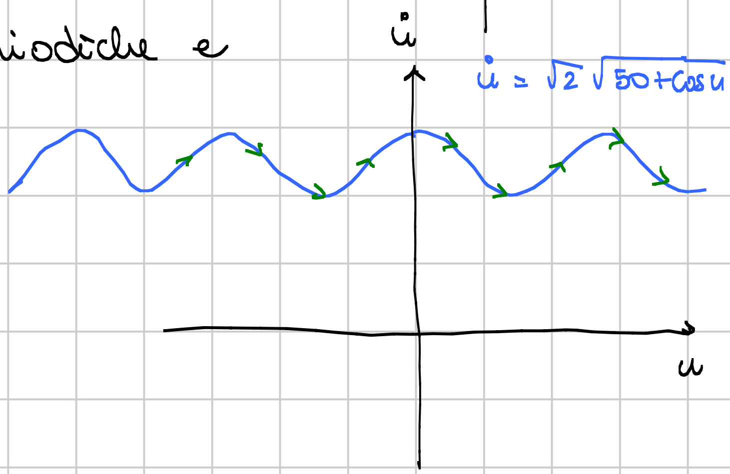
Curve: $\dot u = \pm\sqrt{2}\sqrt{E(0) + \cos u}$ (oss. $E(0) \geq -1$)

- Se $E(0) = -1$, la curva si riduce ad un p.to $(2k\pi, 0)$: si tratta delle soluzioni stazionarie in cui il pendolo parte giù e fermo...

- Se $E(0) \in (-1, 1)$ le curve sono chiuse e limitate. Ottengo soluzioni periodiche sostanzialmente come nel caso $\ddot u = -u$.



- Se $E(0) > 1$, le curve sono periodiche e illimitate



Disegno nello spazio delle fasi