# SSSUP 2011 — LEZIONE 21

Titolo nota 10/05/2011

<u>Equazioni differenziali di ordine 2</u> $\ddot{u}$ = derivata 2ª = accelerazione

<u>Esempio 1</u> $u'' = u$ $\qquad\qquad$ $u'' = -u$

Lineari e si sanno risolvere esplicitamente. Trasformando in sistemi

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = u \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} u' = v \\ v' = -u \end{cases}$$

Il secondo membro del sistema è sublineare nelle variabili $u$ e $v$. Detto meglio

$$\begin{cases} u' = f(u,v,t) \\ v' = g(u,v,t) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} |f(u,v,t)| \le A + B|u| + C|v| \\ |g(u,v,t)| \le A + B|u| + C|v| \end{array}$$

(volendo anche $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ continue)

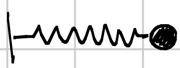
Sotto queste ipotesi il sistema ha soluzioni globali nel tempo

$u(t) = c_1 \cosh t + c_2 \sinh t$ $\qquad\qquad$ $u(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$

$u'' = ku$ $\qquad\qquad$ $u'' = -ku$ $\quad (k>0)$

$u(t) = c_1 \cosh(\sqrt{k}\, t) + c_2 \sinh(\sqrt{k}\, t)$, $\qquad$ $u(t) = c_1 \cos(\sqrt{k}\, t) + c_2 \sin(\sqrt{k}\, t)$

(oscillatore armonico)



soluzioni NON periodiche $\qquad\qquad$ Soluzioni PERIODICHE

<u>Esempio 2</u> $u'' = -u^3$

In questo caso l'esistenza globale NON è garantita.

<u>METODO DELL'ENERGIA</u> Prendo l'equazione e moltiplico per $u'$

$$u'' \cdot u' = -u^3 \cdot u' \qquad\qquad \left[\frac{1}{2}\dot{u}^2\right]' = \left[-\frac{1}{4}u^4\right]'$$

cioè $\quad \left[\frac{1}{2}\dot{u}^2 + \frac{1}{4}u^4\right]' = 0$ $\qquad E(t) = \underbrace{\frac{1}{2}\dot{u}^2}_{\text{cinetica}} + \underbrace{\frac{1}{4}u^4}_{\text{potenziale}}$

$E(t)$: energia

Sappiamo che $E(t) = E(0) \quad \forall t \in \mathbb{R}$, quindi l'energia si conserva.

Essendo l'energia costante $u(t)$ e $\dot{u}(t)$ saranno per forza limitate

$$|\dot{u}(t)| \le \{2E(0)\}^{1/2} \qquad\qquad |u(t)| \le \{4E(0)\}^{1/4}$$

Queste limitatezze escludono blow-up e $\boxed{\text{break-down}}$, per cui c'è esistenza globale.

perché anche la derivata $2^a$ risulta limitata

$\boxed{\text{SPAZIO DELLE FASI}}$ Lo spazio delle fasi è l'insieme che descrive lo stato del sistema. In questo caso è descritto dalla coppia

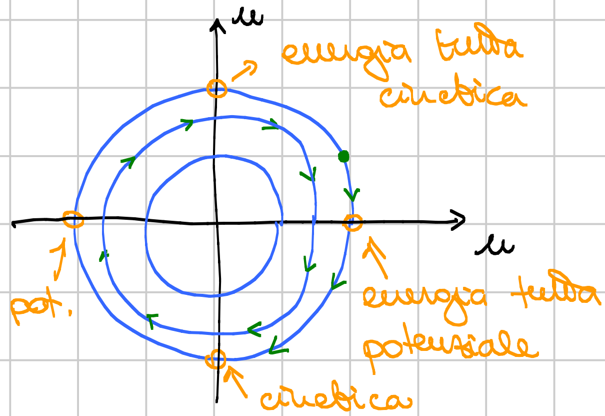
$$(u, \dot{u}) \in \mathbb{R}^2$$

Il teorema di unicità dice che per ogni punto dello spazio delle fasi passa una ed una sola soluzione.

Come vedere le soluzioni nello spazio delle fasi?

$$u'' = -u \qquad u''\cdot u' = -u\cdot u' \qquad \left[\frac{1}{2}\dot{u}^2\right]' = \left[-\frac{1}{2}u^2\right]'$$

$$\left[\frac{1}{2}\dot{u}^2 + \frac{1}{2}u^2\right]' = 0 \qquad E(t) = \frac{1}{2}\dot{u}^2 + \frac{1}{2}u^2 = E(0) \ge 0.$$




Il raggio del cerchio è $2E(0)$ e dipende dall'ampiezza. $\theta_0$ = p.to del cerchio per $t=0$.

$$(\cos t, \sin t)$$

$$c_1 \cos t + c_2 \sin t = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\, \sin(t + \theta_0)$$
$$= A \sin(t + \theta_0)$$

$$u(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t) = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left[\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cos(\omega t) + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sin(\omega t)\right]$$

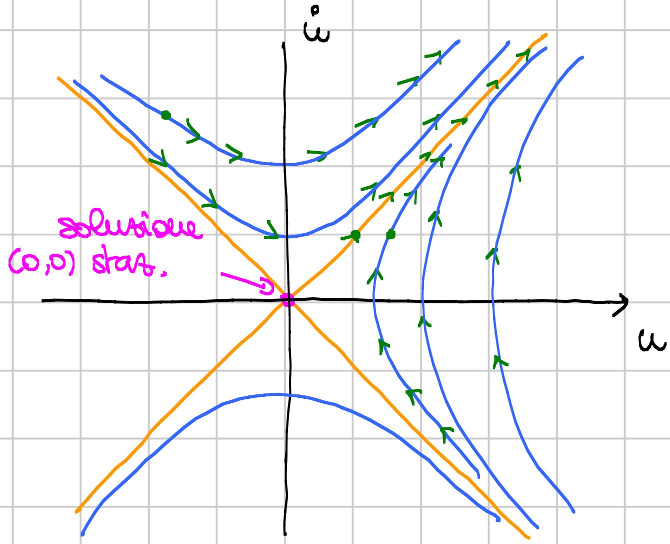
$$= \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\Big[\overset{\sin\theta_0}{\overset{\shortparallel}{a}}\cos(\omega t) + \overset{\cos\theta_0}{\overset{\shortparallel}{b}}\sin(\omega t)\Big] = \boxed{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,\sin(\omega t + \boxed{\theta_0})$$

$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$: ampiezza oscillazione $\qquad \theta_0$: fase iniziale

$u'' = u \qquad \ddot{u} \cdot \dot{u} = u \cdot \dot{u} \qquad \left[\frac{1}{2}\dot{u}^2\right]' = \left[\frac{1}{2}u^2\right]'$

$$\frac{1}{2}\dot{u}^2 - \frac{1}{2}u^2 = E(0) \in \mathbb{R}$$

In particolare le soluzioni di $\ddot{u} = u$ non sono periodiche tranne il caso banale di partenza da $(0,0)$.

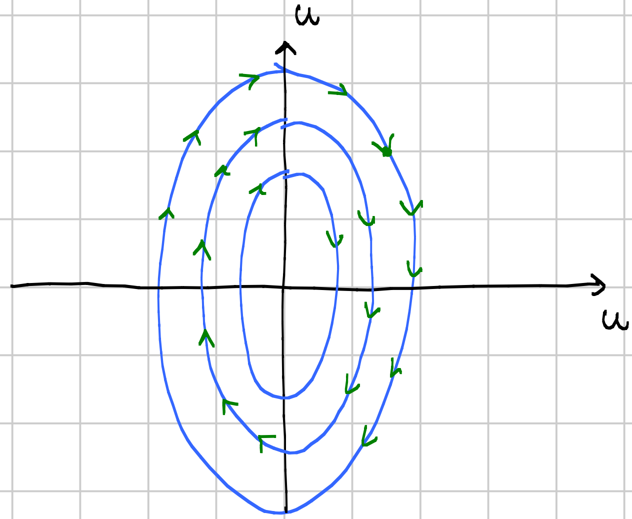



$\ddot{u} = -u^3 \qquad \frac{1}{2}\dot{u}^2 + \frac{1}{4}u^4 = E(0)$

Queste sono una famiglia di curve limitate nel piano $(u, \dot{u})$.
Ci aspettiamo ancora soluzioni periodiche.
Dalla conservazione dell' energia posso ricavare

$$\dot{u} = \pm\sqrt{2E(0) - \frac{1}{2}u^4}$$

↑ dipende dal quadrante




Fissato il semipiano, diventa un' eq. del 1° ordine autonoma, cioè teoricamente risolvibile! Mettiamoci con $\dot{u} > 0$, cioè segno +.

$$\frac{\dot{u}}{\sqrt{2E(0) - \frac{1}{2}u^4}} = 1$$

ora integro tra $\pm\sqrt[4]{4E(0)}$, cioè i valori max e min per la $u(t)$.

$u(t_1) = \min \qquad u(t_2) = \max$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\dot{u}(t)}{\sqrt{\cdots}}\,dt = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} 1\,dt}_{t_2 - t_1} = \frac{1}{2}\text{ Periodo}$$

$\| \leftarrow x = u(t)$

$$\int_{u(t_1)}^{u(t_2)} \frac{dx}{\sqrt{2E(0) - \frac{1}{2}x^4}} = \int_{-\sqrt[4]{4E(0)}}^{\sqrt[4]{4E(0)}} \frac{dx}{\sqrt{2E(0) - \frac{1}{2}x^4}}$$

↖ integrale improprio converg.