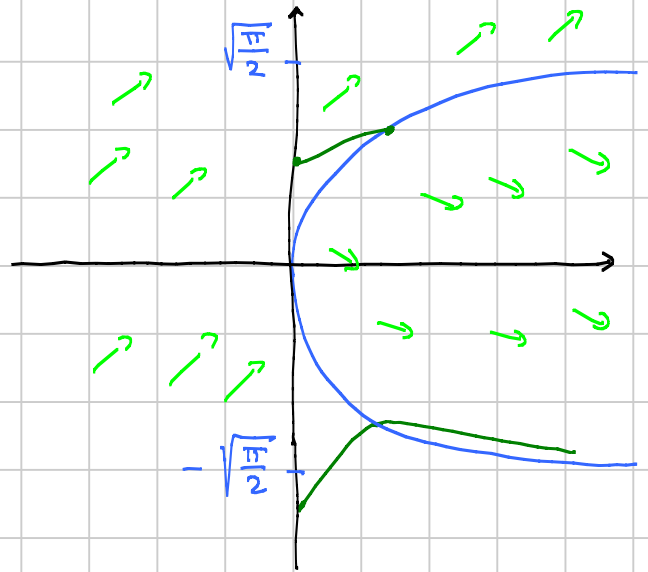


Esempio 3 $\begin{cases} u' = u^2 - \arctan t \\ u(0) = \alpha \end{cases}$

$$u' > 0 \Leftrightarrow u^2 > \arctan t$$

$$\Leftrightarrow u > \sqrt{\arctan t} \text{ oppure } u < -\sqrt{\arctan t}$$



$\alpha < 0, t \geq 0$ Inizialmente cresce, poi tocca e decresce. Non può ritoccare perché dovrebbe farlo con derivata nulla e non si può da sopra

(Rigoroso: o rapporto incrementale

o dico che $v(t) = -\sqrt{\arctan t}$ è una sottosoluzione in quanto $\underbrace{v'}_{\text{neg.}} < \underbrace{v^2 - \arctan t}_0$

Domande: ① perché tutte toccano

② perché dopo aver toccato tende a $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Risposte: ② ho. asintoto. So che $u(t) \rightarrow l \in \mathbb{R}$ (monotonia)

Allora (equazione) $u' \rightarrow l^2 - \frac{\pi}{2}$

Allora esiste $\lim u'$

Allora $\lim u' = 0$, quindi $l = \pm \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, ma il segno + è incompatibile con il decrescere.

① Per ora problema aperto...

$\alpha > 0, t \geq 0$ Opzioni: * tocca e va a $-\sqrt{\pi/2}$

* non tocca e va a $+\infty$

* non tocca e va a $\sqrt{\pi/2}$

* blow-up in tempo finito.

Esistono $\alpha > 0$ per cui tocca: basta partire dalla curva e tornare indietro. Se per un certo α tocca, allora tocca anche per tutti gli $\alpha_1 < \alpha$.

Esistono $\alpha > 0$ per cui si ha blow-up in tempo finito. Perché?

$$u^2 - \arctan t \geq u^2 - \frac{\pi}{2} \quad (\text{in questo caso sempre, ma comunque almeno per } t \in [0, 1])$$

Quindi

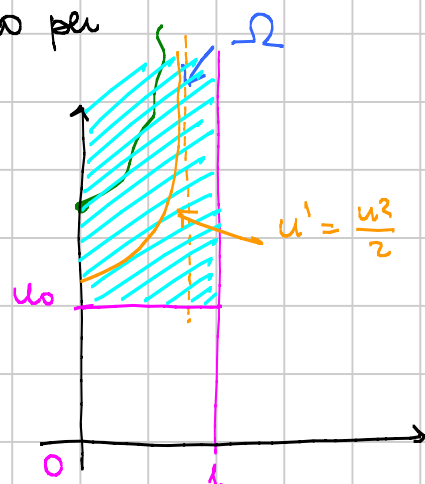
$$u^2 - \arctan t \geq u^2 - \frac{\pi}{2} \geq \frac{u^2}{2}$$

per $t \in [0, 1]$ e $u \geq u_0$

Quindi, FIN QUANDO RESTANO IN Ω , le soluzioni di

$$u' = u^2 - \arctan t \text{ stanno sopra quelle di } u' = \frac{u^2}{2}.$$

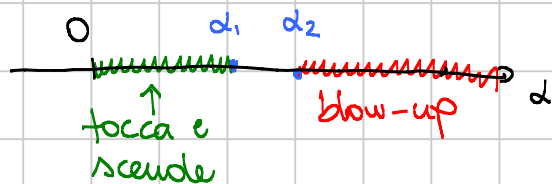
Ora esistono soluzioni di quest'ultima che hanno blow-up PRIMA di $t=1$



Se per un certo α c'è blow-up, allora c'è pure per gli α successivi.

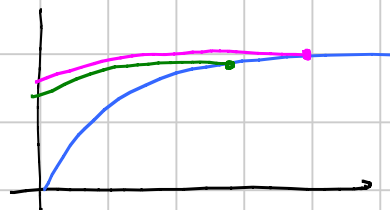
$\alpha_1 = \sup$ dati per cui tocca

$\alpha_2 = \inf$ dati per cui c'è blow-up.



Può toccare con partenza da α_1 ?

NO! Ce ne sarebbe una che tocca più in là, che per forza è partita sopra. Equivalentemente: l'insieme degli α per cui tocca è aperto.



Può esserci blow-up con partenza da α_2 ? NO!

Supponiamo che ci sia blow-up.

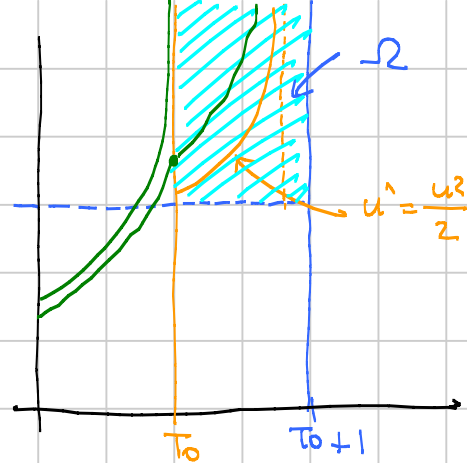
Idea: se punto abbastanza in alto sull'asintoto, allora ho blow-up. Infatti abbiamo che

$$u' = u^2 - \arctan t \geq u^2 - \frac{\pi}{2} \geq \frac{u^2}{2}$$

in $\Omega = [T_0, T_0+1] \times [u_0, +\infty)$

quindi in Ω posso confrontare le sol.

di $u' = u^2 - \arctan t$ con quelle di $u' = \frac{u^2}{2}$.



Quindi gli α per cui c'è blow-up sono un aperto.

Quindi per ogni $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ (magari è un p.to solo) la soluzione resta sempre sopra, quindi cresce sempre, quindi tende a $+\infty$ oppure a $\sqrt{\pi/2}$.

Domande: ③ $\alpha_1 = \alpha_2$?

④ tende a $+\infty$ o $\sqrt{\pi/2}$?

Risposta a ④: tende a $\sqrt{\pi/2}$ perché se tendesse a $+\infty$ supererebbe il valore u_0 per cui

$$u^2 - \arctan t \geq u^2 - \frac{\pi}{2} \geq \frac{u^2}{2}$$

e a quel p.to il blow-up segue dal confronto.

Quindi tutte le soluzioni con $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ tendono a $\sqrt{\pi/2}$.

③ Sia u_1 la soluzione con $u(0) = \alpha_1$ e u_2 similmente. Pongo $w = u_2 - u_1$. Allora

$$w' = u_2' - u_1' = (u_2)^2 - \arctan t - (u_1)^2 + \arctan t > 0$$

Quindi w cresce, ma $w(0) > 0$ ed il limite a $+\infty$ sarebbe $\sqrt{\pi/2} - \sqrt{\pi/2}$. Assurdo.

Altro modo per dimostrare dei blow-up: sparare una sottosoluzione che abbia blow-up.

Prima

$$v(t) = \frac{1}{1-kt}$$

vedo se per qualche valore di k è sottosoluzione

$$v' = \frac{k}{(1-kt)^2} \stackrel{\substack{< \\ \uparrow \\ \text{però}}}{<} \underbrace{\frac{1}{(1-kt)^2} - \arctan t}_{v^2 - \arctan t}$$

La voglio vera per ogni $t \leq \frac{1}{k}$