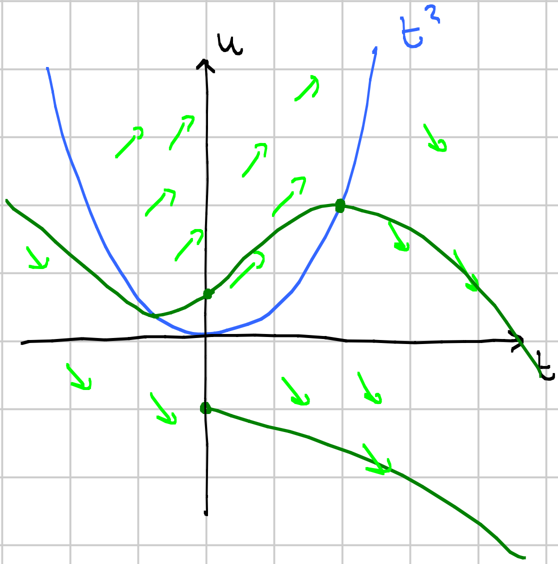
SA 2011 - LEZIONE 19

Titolo nota | 02/05/2011

Studi qualitativi di equazioni diff. non autonome

<u>Esempio 1</u> $\begin{cases} u' = \arctan(u - t^2) \\ u(0) = \alpha \end{cases}$



$\boxed{1° \text{ passo}}$ Cercare di capire segno di u'

$u' > 0 \iff u - t^2 > 0 \iff u > t^2$

$\boxed{0° \text{ passo}}$ $f(t,u)$ limitata $\Rightarrow$ c'è esistenza globale per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{2° \text{ passo}}$ Se $\alpha < 0$, la soluzione è decrescente per $t \geq 0$ e $u(t) \to -\infty$ per $t \to +\infty$

Infatti

- per monotonia $u(t) \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
- a quel pto
$$u' = \arctan(u - t^2) \to \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$
- se fosse $\ell \in \mathbb{R}$ u' dovrebbe cioè avere limite oppure tendere a 0, il che non è. Quindi $\ell \in \mathbb{R}$ non può essere.

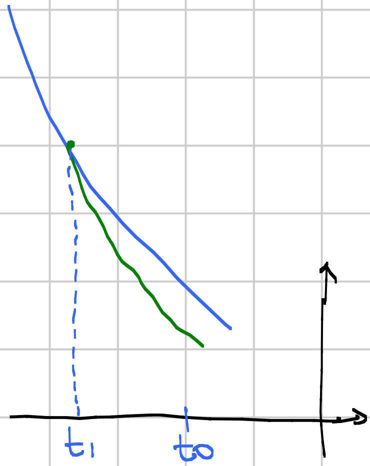
$\boxed{3° \text{ passo}}$ Se $\alpha > 0$ ci sono almeno 2 opzioni:

* sempre crescente e tende a $+\infty$

* cresce, tocca parabola, poi scende e tende a $-\infty$

Di sicuro ci sono degli α per cui il comportamento è il 2° (basta partire sulla parabola e "tornare indietro").

4° passo Parto con $\alpha > 0$ e vedo che succede per $t \leq 0$.
Ad un certo p.to tocca la parabola, poi cresce e non la può più toccare perché dovrebbe farlo con derivata nulla e non si può arrivare da sotto con derivata nulla



Dim. So che ad un certo tempo t_0 ho che $u(t_0) < t_0^2$, con $t_0 < 0$. Supponiamo per assurdo che $u(t) > t^2$ per un qualche $t < t_0$. Sia

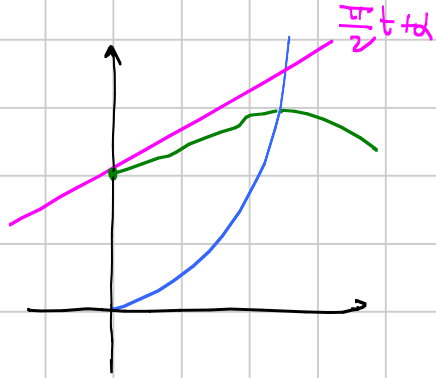
$$t_1 = \sup \{ t < t_0 : u(t) = t^2 \}$$

Ora so che $u(t) \leq t^2$ per ogni $t \in [t_1, t_0]$. Ma allora

$$0 = u'(t_1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{u(t_1+h) - u(t_1)}{h} \leq \lim_{h \to 0^+} \frac{(t_1+h)^2 - t_1^2}{h} = 2t_1 < 0$$

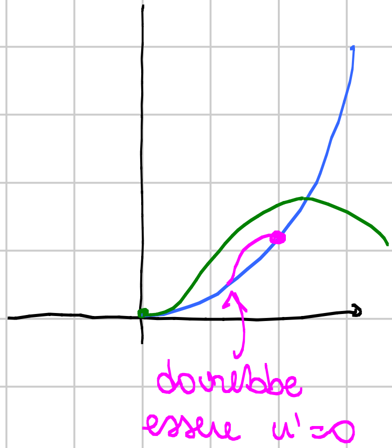
per l'eq. diff. — def. di derivata — t_1 p.to contatto $+\ u(t) \leq t^2$ — derivata di t^2

5° passo Per ogni $\alpha > 0$ la soluzione tocca la parabola anche per $t > 0$.
Infatti $u' \leq \frac{\pi}{2}$ sempre, quindi $u(t) \leq \alpha + \frac{\pi}{2} t$ e questa retta tocca la parabola in un tempo finito



6° passo Per $\alpha < 0$ e $t \leq 0$ la soluzione va a $+\infty$ senza toccare (stesso motivo del passo 4 per il non contatto).
Il limite è $+\infty$ perché se fosse l la derivata tenderebbe a $-\frac{\pi}{2}$, il che non è possibile per...

7° passo | $\alpha = 0$. Può toccare la parabola per $t \geq 0$?
Supponiamo per assurdo che la tocchi...
Ma allora una soluzione che parte in mezzo dovrebbe incontrare in mezzo la parabola dall'alto con derivata nulla: impossibile per il solito motivo (dimostrarlo rigorosamente con il rapporto incrementale).



Osservazione 1 Per $t \geq 0$ si ha che $v(t) = t^2$ è soprasoluzione dell'equazione.

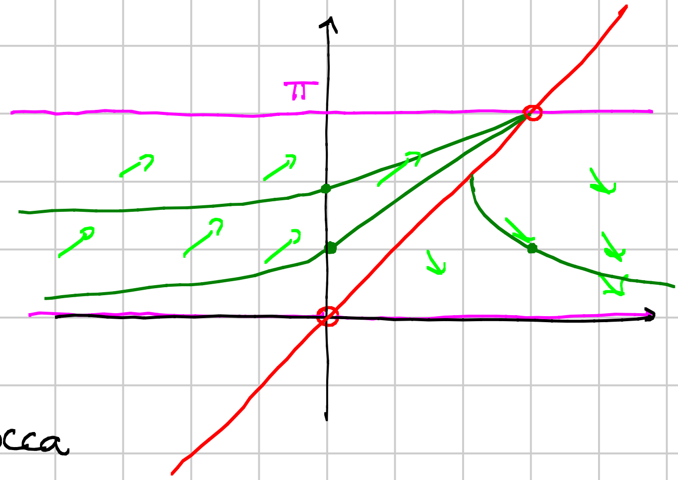
Osservazione 2 Nel passato sopra e sottosoluzione si scambiano nei teoremi di confronto.

—o—o—

Esempio 2

$$u' = \frac{\sin u}{u - t}$$

$$u(0) = \alpha \in (0, \pi)$$



La soluzione stazionaria $u(t) \equiv \pi$ è definita solo fino a quando tocca la bisettrice, cioè in $(-\infty, \pi)$

Partendo con $\alpha \in (0, \pi)$ per $t \leq 0$ la soluzione esiste, resta > 0, e tende ad un certo limite ℓ. Il teo. dell'asintoto non permette di escludere limiti > 0.
Per $t \geq 0$ la soluzione non può toccare la soluzione stazionaria e non può toccare la bisettrice perché dovrebbe farlo con "derivata $+\infty$" arrivandoci dall'alto.
L'unica possibilità è che arrivi nel p.to (π, π) (FOSSA COMUNE)

Le soluzioni non possono tendere a $\ell \neq 0$.
Dimostriamolo per la soluzione con $u(\pi) = \alpha \in (0,\pi)$ e $t \to +\infty$.
Supponiamo $u(t) \to \ell > 0$. Allora

$$u'(t) = \frac{\sin u}{u-t} \leq \frac{1}{\ell - t} \qquad \text{per } t \geq 0$$

$$u(t) - t \geq -t \text{, quindi } \frac{1}{u-t} \leq \frac{1}{-t}$$

$$-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{3}$$

ma da questa non posso dedurre che $\dfrac{\sin u}{u-t} \leq -\dfrac{1}{t}$!!!

Quello vero è che $\boxed{u' = \dfrac{\sin u}{u-t} \leq -\dfrac{\sin \ell}{t}}$

Infatti $\dfrac{\sin u}{u-t} \leq -\dfrac{\sin \ell}{t} \iff \dfrac{\sin u}{t-u} \geq \dfrac{\sin \ell}{t}$

ora è tutto positivo e ok.
Ma allora

$$u(t) - u(\pi) = \int_\pi^t u'(s)\, ds = -\int_\pi^t \frac{\sin \ell}{s}\, ds \to -\infty$$

assurdo.