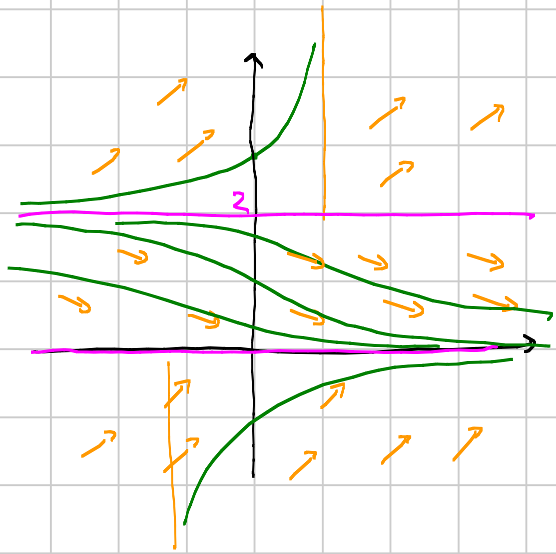
SSSUP 2011 — LEZIONE 18

Titolo nota 18/04/2011

<u>Esempio 1</u> $\begin{cases} u' = u^2 - 2u = f(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$



Fatto 1 Soluzioni stazionarie: $f(u_0) = 0$

$u(t) \equiv 2$ e $u(t) \equiv 0$

Fatto 2 La monotonia di u dipende dalla zona

Fatto 3 (Comune a tutte le equazioni autonome)

Se $u(t)$ è una soluzione (definita dove le pare), allora per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha che $u(t+a)$ è ancora una soluzione (definita sull'insieme opportunamente traslato).

In altre parole: la traslata di una soluzione è ancora una soluzione.

<u>Dim.</u> Pongo $v(t) = u(t+a)$

$$v'(t) = u'(t+a) \underset{\uparrow}{=} f(u(t+a)) = f(v(t))$$

uso che u è soluzione.

Fatto 4 Se u_0 è abbastanza grande, allora c'è blow-up (e questo per il discorso delle traslazioni dice che c'è blow-up per ogni $u_0 > 2$)

Poiché f ha crescita quadratica, cioè

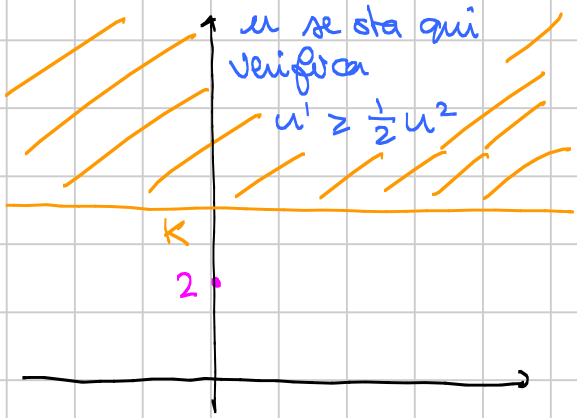
$$\lim_{u \to +\infty} \frac{f(u)}{u^2} = 1$$

avremo che $f(u) \geq \frac{1}{2} u^2$ per ogni $u \geq k$

Ma allora $u' = f(u) \geq \frac{1}{2} u^2$ se $u(t) \geq k$

cioè $u(t)$, se parte sopra k, è soprasoluzione di un'eq. che ha blow-up, quindi ha blow-up pure lei.

Se parto sopra k, la soluzione è monotona, quindi resta sopra k, dove posso usare il confronto.



— o — o —

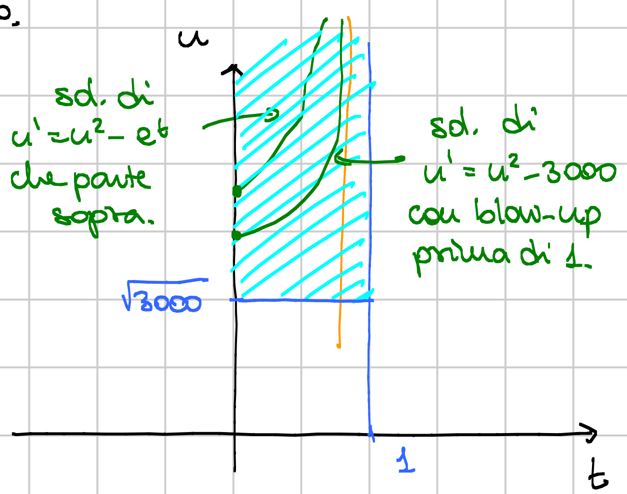
<u>Esempio 2</u> $\begin{cases} u' = u^2 - e^t \\ u(0) = u_0 > 0 \end{cases}$

Se u_0 è abbastanza grande, allora c'è blow-up.

<u>Esercizio di allenamento</u> $\begin{cases} u' = u^2 - 3000 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$

In questo caso c'è blow-up per $u_0 > \sqrt{3000}$. Inoltre il tempo di vita tende a zero quando $u_0 \to +\infty$.

Prendo un k con questa proprietà: se $u_0 \geq k$, allora la soluzione di
$\begin{cases} u' = u^2 - 3000 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$
ha tempo di vita ≤ 1.



Per $t \in [0,1]$ ho che $u^2 - e^t \geq u^2 - 3000$. Quindi fino a quando resto nella zona tratteggiata le soluzioni di $u' = u^2 - e^t$ risolvono $u' \geq u^2 - 3000$, quindi sono soprasoluzioni dell'eq. con il 3000.

Occhio: posso usare il confronto tra $u' = u^2 - e^t$ e $u' = u^2 - 3000$ solo per $t \in [0,1]$, ma se lo scoppiamento è già avvenuto, ho finito.

— o — o —

Teoremi di esistenza globale

$\boxed{\text{Teorema 1}}$ Se $u' = f(t,u)$ con f definita su tutto $\mathbb{R}^2$ e limitata, cioè $\exists\, M \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(t,u)| \leq M$ per ogni $(t,u) \in \mathbb{R}^2$, allora c'è esistenza globale.

Estensione: se f è definita per $(t,u) \in (a,b) \times \mathbb{R}$, e in questa striscia è limitata, allora la soluzione è definita per ogni $t \in (a,b)$.

$\boxed{\text{Teorema 2}}$ Se $u' = f(t,u)$ con f definita su tutto $\mathbb{R}^2$ e sublineare, cioè esistono costanti A e B t.c.

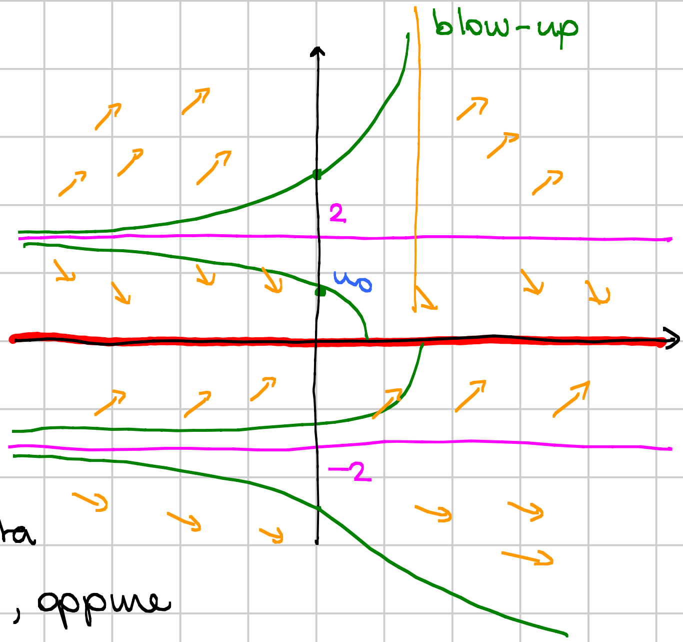
$$|f(t,u)| \leq A + B|u| \qquad \forall\, (t,u) \in \mathbb{R}^2,$$

allora c'è esistenza globale

Estensione: $|f(t,u)| \leq A(t) + B(t)|u|$ con $A(t)$ e $B(t)$ continue.

Motivo per cui funziona: facendo il confronto con le soluzioni di $u' = A + Bu$ riesco ad escludere il blow-up.

Esempio 3 $\qquad u' = \dfrac{u^2-4}{u} \cdot e^u$



$u(t) \equiv \pm 2$ sol. stazionarie

$u = 0$ non si può toccare

$\boxed{u(0) \in (0,2)}$ Esistenza globale per $t \leq 0$ e break-down per $t > 0$

Per l'esistenza globale per $t < 0$ basta che modifichi f fuori da $[u_0, 2]$, oppure osservo che la soluzione deve stare in quell'intervallo e lì f è limitata.

Per il break-down ragiono per assurdo: se avessi esist. glob., per monotonia avrei un limite ℓ per $t \to +\infty$, con $\ell \in [0, u_0]$, ma allora $u'(t) \to f(\ell)$ che dovrebbe essere $=0$, il che è impossibile.

$\boxed{u(0) \in (-2,0)}$ Stesso discorso.

$\boxed{u(0) \in (2,+\infty)}$ Esistenza globale per $t \leq 0$ (è costretta a stare tra 2 e u_0, e lì f è limitata).
Blow-up per $t \geq 0$ in quanto $f(u) \geq u^2$ per u sufficientemente grandi.

$\boxed{u(0) \in (-\infty,-2)}$ Esistenza globale per tempi positivi e negativi in quanto $f(u)$ è limitata per $u \leq -2$, e la soluzione è costretta a stare lì.

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{u(t)}{t} \underset{\left[\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{Hôp}\right]}{=} \lim_{t \to +\infty} \frac{u'(t)}{1} = \lim_{t \to +\infty} f(u(t))$$

$$= \lim_{u \to -\infty} f(u) = 0.$$