Teoremi di confronto $\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$ $\begin{cases} v' = g(t,v) \\ v(t_0) = v_0 \end{cases}$

Si intende che $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $g: \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

Supponiamo che f e g siano continue e che

- $f(t,x) < g(t,x)$ per ogni $(t,x) \in \Omega$,
- $u_0 < v_0$

Allora $u(t) < v(t)$ per ogni $t \geq t_0$ per cui entrambe le soluzioni esistono.

Oss. Il tempo iniziale t_0 è lo stesso per tutte e 2.
Si assume la continuità di f e g e disuguaglianze strette nelle ipotesi.
L'enunciato vale anche assumendo solo che $u' \leq f(t,u)$ e $v' \geq g(t,v)$

Oss. Non posso dire, dalle ipotesi, che $u'(t) < v'(t)$ per ogni $t \geq t_0$ per cui le soluzioni esistono. Infatti

$$u'(t) = f(t, u(t)) \quad \uparrow \quad g(t, v(t)) = v'(t)$$

questi 2 non li so confrontare se $u(t) \neq v(t)$

Dim.: Pongo $w(t) = v(t) - u(t)$. Al tempo t_0 ho che

$$w(t_0) = v_0 - u_0 > 0$$

Supponiamo per assurdo che $w(t) \leq 0$ per un qualche $t > t_0$.
Considero allora

$$t_* = \inf\{t > t_0 : w(t) \leq 0\}$$

Cosa succede in t_*? Si ha che $w(t_*) = 0$, cioè $u(t_*) = v(t_*)$. Ma allora

uguali

per ipotesi

$$w'(t_*) = v'(t_*) - u'(t_*) = g(t_*, v(t_*)) - f(t_*, u(t_*)) > 0$$

STRETTA

Inoltre $w(t) > 0$ per ogni $t \in [t_0, t_*)$,
e questo implica che $w'(t_*) \le 0$.
Infatti

$$w'(t_*) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\overbrace{\boxed{w(t_* - h) - w(t_*)}}^{>0}}{\underbrace{\boxed{-h}}_{<0}} \le 0$$

Dovendo contemporaneamente essere $w'(t_*) > 0$ e ≤ 0, abbiamo un assurdo, quindi $w(t) > 0$ finché esiste, quindi $v(t) > u(t)$ finché esistono entrambe (dopo t_0)

— o — o —

<u>Soprasoluzioni e sottosoluzioni</u> Se $u' > f(t,u)$ si dice che u è una <u>soprasoluzione</u> (stretta). Se $u' < f(t,u)$ si dice che u è una <u>sottosoluzione</u> (stretta).

<u>Teorema</u> Sia (a,b) un intervallo, e siano $u : (a,b) \to \mathbb{R}$ e $v : (a,b) \to \mathbb{R}$. Supponiamo che

- u soprasoluzione stretta in (a,b)
- v sottosoluzione stretta in (a,b)
- $t_0 \in (a,b)$ e $u(t_0) > v(t_0)$
- f continua

Allora $u(t) > v(t)$ per ogni $t \in [t_0, b)$.

<u>Dim.</u>: esattamente come prima.

<u>Oss.</u> Se nella definizione di sopra e sottosoluzione cambiamo $>$ e $<$ con $\ge$ e $\le$ in generale diventa tutto falso (pensare agli esempi di non unicità).
Se però la f è Lip. in u uniformemente in t, allora diventa tutto vero (con $\ge$ e $\le$ nelle ipotesi e nella tesi)

Motivo: se f è Lip... con costante L e $u' \ge f(t,u)$, allora $u_\varepsilon(t) = u(t) + \varepsilon e^{2Lt}$ è soprasoluzione stretta. Infatti devo dimostrare che $u_\varepsilon' > f(t, u_\varepsilon)$:

$$u_\varepsilon'(t) = u'(t) + 2\varepsilon L e^{2Lt} \overset{\text{ipotesi}}{\geq} f(t, u(t)) + 2\varepsilon L e^{2Lt}$$
$$> f(t, u(t) + \varepsilon e^{2Lt})$$

spero, ma è la def. di Lip. sostanzialmente.

Esistenza globale, blow-up, break-down

__Esempio__ $\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = u_0 > 0 \end{cases}$

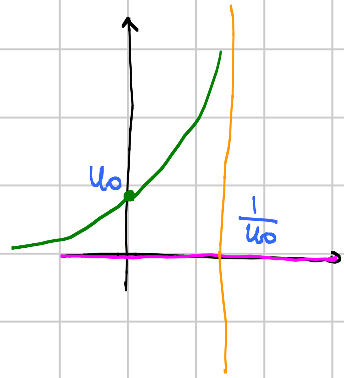
Esistenza locale: banale

Unicità: banale perché u^2 è loc. Lipschitz

L'eq. è a variabili separabili e si risolve esplicitamente

$$\frac{du}{dt} = u^2 \qquad \frac{du}{u^2} = dt$$

$$-\frac{1}{u} = t + c \qquad u(t) = \frac{1}{c-t}$$



Sostituendo il dato iniziale ottengo $u(t) = \frac{u_0}{1 - u_0 t}$

(una verifica diretta mostra che è soluz.)

La soluzione "scoppia" per $t = \frac{1}{u_0}$, quindi non esiste globalmente.

__Definizioni__ __Intervallo massimale di esistenza__: pezzo (componente connessa) dell'insieme di definizione della soluzione che contiene il tempo iniziale

Tempo di vita = sup dell'intervallo massimale di esistenza.

__Teorema di alternativa__ Sia $u'(t) = f(t, u(t))$ con $f: \Omega \to \mathbb{R}$ ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$). Sia T il tempo di vita della soluzione. Allora si hanno 3 possibilità (non è detto che si escludano a vicenda)

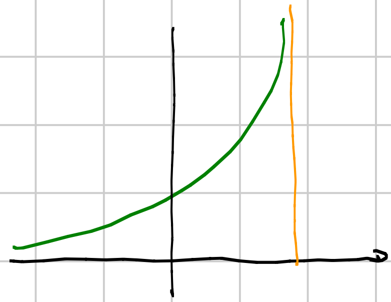
1. $T = +\infty$ (la sol. ha esistenza globale nel futuro)
2. $\limsup_{t \to T^-} |u(t)| = +\infty$ (la sol. ha blow-up per $t \to T^-$)
3. $\liminf_{t \to T^-} \text{dist}\left((t, u(t)), \mathbb{R}^2 \setminus \Omega\right) = 0$ (break-down)

Oss. La terza possibilità dice che $(t, u(t))$ sta "uscendo" dalla zona in cui è definito il 2° membro dell'equazione.
$\boxed{\text{In genere}}$ questo vuol dire che f sta diventando $\pm\infty$, quindi u' sta diventando $\pm\infty$

Esempio generalizzato $\begin{cases} u' = a u^\alpha \\ u(0) = u_0 > 0 \end{cases}$ $\boxed{a > 0 \text{ e } \alpha > 1}$

Esercizio: l'equazione si risolve esplicitamente e si ottiene che

- c'è esistenza globale per $t \leq 0$;
- blow-up per $t \geq 0$

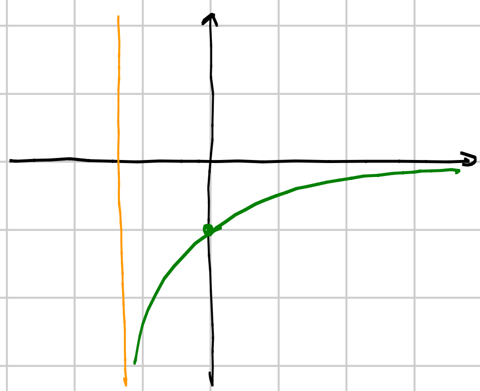


A parità di a ed α il tempo di vita

- tende a $+\infty$ quando $u_0 \to 0^+$
- tende a 0^+ quando $u_0 \to +\infty$.

Ci sono diverse varianti: con $a < 0$ si scambiano tempi > 0 e < 0.
Se l'equazione è $\begin{cases} u' = a|u|^\alpha \\ u(0) = u_0 < 0 \end{cases}$ $a > 0$ e $\alpha > 1$

allora la situazione è questa



Morale: potenze più alte di 1 = blow-up da qualche parte.