SSSUP 2011 — LEZIONE 16

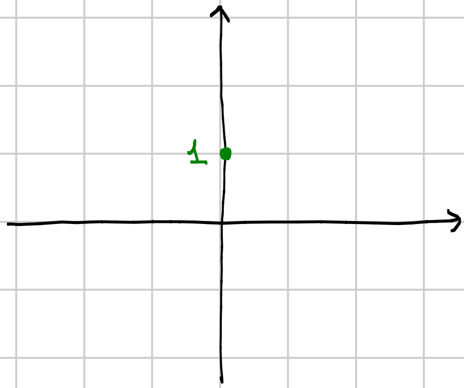
Titolo nota 15/04/2011

Studio qualitativo = capire come è fatta la soluzione senza risolvere esplicitamente.

<u>Esempio 1</u> $\begin{cases} u' = \sin u \\ u(0) = 1 \end{cases}$

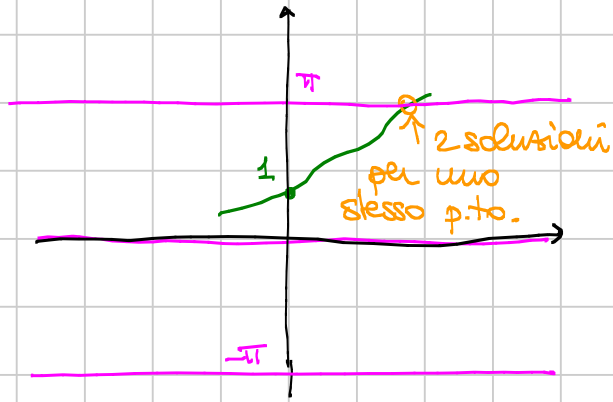
$\boxed{\text{Fatto 1}}$ Esistenza e unicità locali sono assicurate dal teorema generale.

$\boxed{\text{Fatto 2}}$ Tutte le funzioni del tipo $u(t) \equiv k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$) sono soluzioni dell'equazione



[Fatto generale: se l'equazione è del tipo $u' = f(u)$, cioè autonoma, ogni valore u_0 t.c. $f(u_0) = 0$ corrisponde ad una soluzione <u>stazionaria</u> $u(t) \equiv u_0$ dell'eq. Se f è Lip., quelle stazionarie sono le uniche sol. con quei dati iniziali].

$\boxed{\text{Fatto 3}}$ La soluzione che stiamo cercando è sempre compresa tra 0 e π. Se non lo fosse, avrei una violazione al teorema di unicità a partire dal p.to di contatto.



$\boxed{\text{Fatto 4}}$ Sapendo che $0 < u(t) < \pi$, avremo che $u'(t) = \sin u(t) > 0$, quindi u è monotona crescente.

$\boxed{\text{Fatto 5}}$ Supponiamo di sapere che la soluzione è globale, cioè $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Allora per monotonia esistono

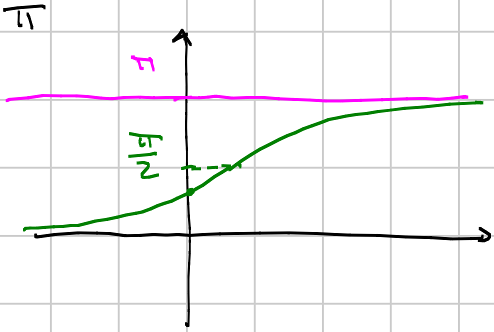
$$l_1 = \lim_{t \to +\infty} u(t) \qquad l_2 = \lim_{t \to -\infty} u(t).$$

Vorrei dire che $l_1 = \pi$ e $l_2 = 0$.
Brutalmente, se avessimo $l_1 < \pi$, avremmo che $u'(t) \to \sin l_1 > 0$, il che vorrebbe dire che $u(t)$ cresce linearmente con coeff. angolare positivo, il che è incompatibile con un limite finito.
Idem a $-\infty$.

$\boxed{\text{Fatto 6}}$ Convessità e concavità di u. Calcolo

$$u''(t) = [u'(t)]' = [\sin u(t)]'$$
$$= \cos u(t) \cdot u'(t)$$
$$= \cos u(t) \cdot \sin u(t)$$

Quindi $u''(t) > 0$ quando $0 < u(t) < \frac{\pi}{2}$ e
$u''(t) < 0$ quando $\frac{\pi}{2} < u(t) < \pi$



$\boxed{\text{TEOREMA DELL'ASINTOTO}}$

Sia $u : (A, +\infty) \to \mathbb{R}$ con $A \in \mathbb{R}$.
Supponiamo che u sia derivabile e che
$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = l \in \mathbb{R}$$

Allora ci sono due possibilità (e ci sono entrambe)
- $u'(t) \to 0$ per $t \to +\infty$
- $u'(t)$ non ha limite per $t \to +\infty$, ma in questo caso
$$\liminf_{t \to +\infty} u'(t) \leq 0 \quad \text{e} \quad \limsup_{t \to +\infty} u'(t) \geq 0.$$

<u>Esempio 1</u> $u(t) = \frac{\sin t}{t}$ $\qquad u(t) \to 0$ per $t \to +\infty$

$$u'(t) = \frac{\cos t}{t} - \frac{\sin t}{t^2} \to 0,$$ quindi siamo nel 1° caso

<u>Esempio 2</u> $u(t) = \frac{\sin t^{20}}{t}$. Ora $u'(t)$ non ha limite ($\limsup = +\infty$, $\liminf = -\infty$).

Come si usa nello studio qualitativo?

Sappiamo per monotonia che $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = l_1 \in [1,\pi]$.
Dall'equazione deduciamo che

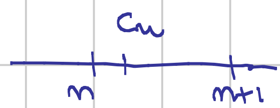
$$\lim_{t\to+\infty} u'(t) = \lim_{t\to+\infty} \sin u(t) \underset{\text{continuità di } \sin x}{=} \sin l_1$$

Quindi ora sappiamo che il limite di $u'(t)$ esiste, ma allora per il teo dell'asintoto deve essere 0, quindi $\sin l_1 = 0$, che in $[1,\pi]$ ha come unica soluzione $l_1 = \pi$.

Dim. sbagliata $u(t) \to l_1$, $\boxed{\text{quindi}}$ $u'(t) \to 0$, quindi $\sin l_1 = 0$, quindi $l_1 = \pi$.
NO!!!

$\boxed{\text{Dim. teo. asintoto}}$ Se $u'(t)$ non ha limite c'è poco da fare.
Supponiamo quindi che $u'(t) \to m \in \overline{\mathbb{R}}$ per $t \to +\infty$.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$, applico Lagrange in $[n, n+1]$:

$$\begin{array}{ccccc} u(n+1) & - & u(n) & = & 1\cdot \boxed{u'(c_n)} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ l & - & l & = & m \end{array}$$

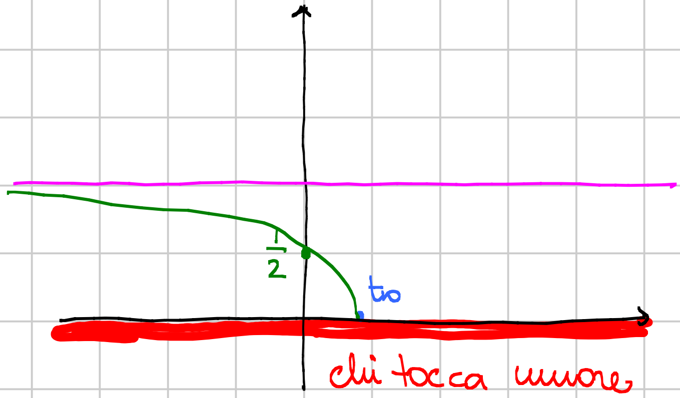


Quando $n \to +\infty$, anche $c_n \to +\infty$

$\Rightarrow m = 0$.

Oss. In generale ho dimostrato che esiste $c_n \to +\infty$ tale che $u'(c_n) \to 0$. Questo basta per concludere che $u'(t) \to 0$ per $t \to +\infty$ solo se so già che il limite esiste.
Essendo 0 un possibile limite, questo dimostra comunque che $\liminf \le 0$ e $\limsup \ge 0$.

$\boxed{\text{Secondo studio}}$ $\begin{cases} u' = \log u \\ u(0) = 1/2 \end{cases}$



$u(t) \equiv 1$ soluzione stazionaria.
Quindi $0 < u(t) < 1$ per ogni t per cui è definita la soluzione
Quindi $u'(t) < 0$ e pertanto u decrescente fino a quando è definita.

$\lim_{t \to -\infty} u(t) = 1$. Infatti

→ per monotonia il limite esiste ed è un certo $\ell \in [\frac{1}{2}, 1]$

→ per l'equazione $\lim_{t \to -\infty} u'(t) = \lim_{t \to -\infty} \log u(t) = \log \ell$

→ poiché si ha limite, per il teo. dell'asintoto il limite deve essere 0, cioè $\log \ell = 0$, cioè $\ell = 1$.

Questo facendo finta che la soluzione esista per ogni $t \leq 0$.

La soluzione NON può essere definita per ogni $t \geq 0$. Se lo fosse per monotonia esisterebbe il limite $\ell_1 \in [0, \frac{1}{2}]$ e ... per il teorema dell'asintoto dovrebbe essere $\log \ell_1 = 0$, il che è impossibile.
Quindi la soluzione può essere definita solo fino ad un certo t_0 e lì tende a 0 (se tendesse a $\frac{1}{10}$, risolverei il problema con $u(t_0) = \frac{1}{10}$ e continuerei la soluzione).