SSSUP 2011 - LEZIONE 15

Equazioni differenziali $F(t, u, u') = 0$

Incognita $\underbrace{u: (a,b)}_{}\to \mathbb{R}$ $u(t)$

insieme di definizione
è tra le incognite

$F(t, u, u', \dots, u^{(k)}) = 0$ eq. diff. di ordine k

autonoma / non autonoma a seconda che ci sia o no dipendenza da t.

Eq. in forma normale:

$$u^{(k)} = \Phi(t, u, u', \dots, u^{(k-1)})$$

Problema di Cauchy = equazione differenziale + cond. iniziali

Cond. iniziali: prescrivere i valori di u e di tutte le sue prime k-1 derivate in un certo p.to t_0:

$$\left.\begin{array}{l} u(t_0) = u_0 \\ u'(t_0) = u_1 \quad \dots \\ u^{(k-1)}(t_0) = u_{k-1} \end{array}\right\}$$

k condizioni iniziali se l'eq. ha ordine k.

TEOREMA DI ESISTENZA Consideriamo il probl. di Cauchy per un'eq. del 1º ordine in forma normale

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

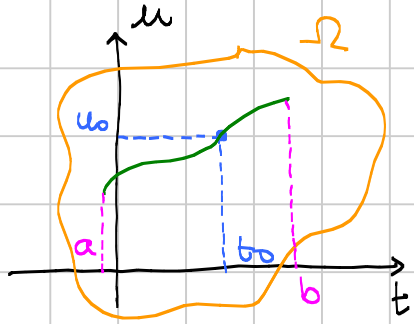
Si intende che $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ è un aperto, $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $(t_0, u_0) \in \Omega$.

Supponiamo che f sia $\boxed{\text{continua}}$ in Ω.

Allora il problema ammette ALMENO una soluzione, cioè esiste $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ ed esiste $u: (a,b) \to \mathbb{R}$ tale che

- u è derivabile per ogni $t \in (a,b)$;
- $(t, u(t)) \in \Omega$ per ogni $t \in (a,b)$;
- $t_0 \in (a,b)$;
- $u(t_0) = u_0$ e $u'(t) = f(t, u(t))$ per ogni $t \in (a,b)$.

TEOREMA DI UNICITÀ. Sia tutto come sopra.



Supponiamo inoltre che f sia $\boxed{\text{Lipschitziana}}$ in u uniformemente rispetto a t, cioè che esista una costante L t.c.

$$|f(t,u_1) - f(t,u_2)| \leq L\,|u_1 - u_2|$$

per ogni (t, u_1, u_2) t.c. $(t,u_1) \in \Omega$, $(t,u_2) \in \Omega$.
Allora la soluzione è unica.

Oss. Cercando soluzioni locali (cioè definite solo in un intervallo (a,b) contenente t_0), posso sempre supporre Ω = rettangolo e quindi l'unif. Lip. può seguire, ad esempio, dalla limitatezza della derivata di f rispetto ad u.

— o — o —

Sistemi di equazioni diff.
$$\begin{cases} u' = f(t,u,v) \\ v' = g(t,u,v) \end{cases}$$

sistema di 2 eq. del 1° ordine nelle incognite $u(t)$ e $v(t)$.

Posso considerare come incognita il vettore $U(t) = (u(t), v(t))$ e riscrivere il sistema nella forma

$$U'(t) = F(t, U(t))$$

dove F è una funzione a valori vettoriali.
La notazione per equazioni e sistemi è la stessa, solo che ora
$U : (a,b) \to \mathbb{R}^m$ ← numero di incognite
$F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ con Ω aperto in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$.
La condizione iniziale per il problema di Cauchy diventa
$U(t_0) = U_0$, dove $t_0 \in \mathbb{R}$ e $U_0 \in \mathbb{R}^m$.
I teoremi di esistenza ed unicità valgono anche per i sistemi.

— o — o —

Equazioni di ordine > 1 vs sistemi

Consideriamo l'equazione $u''' + \sin u'' + t\cos u' + u \cdot u'' = 0$
Pongo $u = u$, $u' = v$, $u'' = z$. Voglio scrivere un sistema nelle incognite u, v, z, del 1° ordine, equivalente all'eq. data:

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = z \\ z' = -\sin z - t\cos v - u \cdot z \end{cases}$$

(oss: $v' = u''$)

(ho ricavato $z' = u''' = \dots$)

In generale un'eq. di ordine k in forma normale è sempre equivalente ad un sistema del 1° ordine in k incognite, sempre in forma normale. Stessa cosa per sistemi di ordine superiore.
Conseguenza: basta fare la teoria per sistemi del 1° ordine.

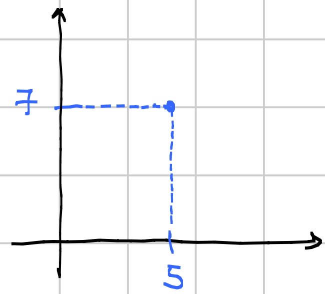
<u>Esempio 1</u> $[u']^2 = t^2$ Non si può portare in forma normale, almeno globalmente.

Se la condizione iniziale è $u(5) = 7$

$u' = t$ oppure $u' = -t$

$u(t) = \frac{1}{2}t^2 + \text{cost}$ in modo che sia $u(5) = 7$

$u(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \text{cost}$ da aggiustare



In questo caso ho 2 soluzioni che passano per lo stesso punto, e l'equazione era regolarissima.

<u>Oss.</u> A priori potrei avere $u' = t$ per certi valori di t
$u' = -t$ per altri valori

Il cambio (tenendo conto che u' la voglio continua) può avvenire solo a $t=0$, ma lì può avvenire.

<u>Esempio 2</u> $\begin{cases} u' = 3|u|^{2/3} \\ u(0) = 0 \end{cases}$ Eq. autonoma con secondo membro non Lipschitz (vicino a $u=0$)

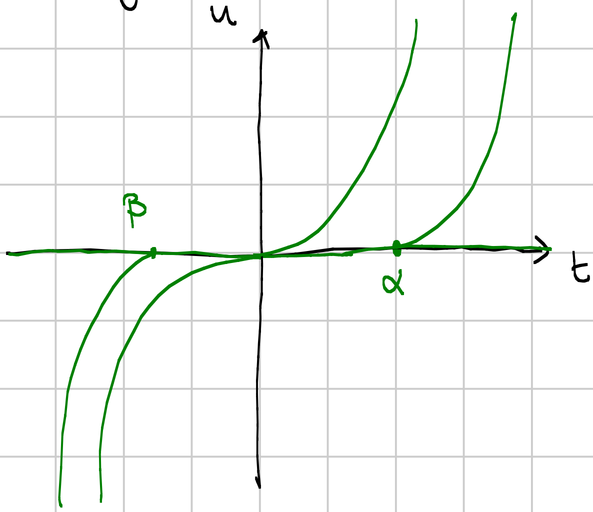
Una soluzione è la funzione $u(t) \equiv 0$ (globale: definita per ogni $t \in \mathbb{R}$).

Un'altra soluzione è $u(t) = t^3$: basta sostituire

$u'(t) = 3t^2 = 3|u(t)|^{2/3} = 3|t^3|^{2/3}$ (anche questa globale)

Ci sono quindi almeno 2 soluzioni con $u(0) = 0$.

In realtà ci sono infinite soluzioni che formano il PENNELLO DI PEANO, e sono date da



$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 \le t \le \alpha \\ (t-\alpha)^3 & \text{per } t \ge \alpha \end{cases}$$

Una costruzione analoga vale per $t \le 0$.

Oss. Si verifica facilmente che in questo modo si ottiene una famiglia di sol. dipendente da 2 parametri α e β ($u(t) \equiv 0$ e $u(t) \equiv t^3$ sono la più grande e la più piccola, in mezzo c'è il pennello).

Oss. Se il dato iniziale è $u(t_0) = u_0$ con $u_0 \neq 0$, allora la soluzione è LOCALMENTE unica, perché posso restringermi ad un rettangolo in cui il 2° membro è Lip. in u.

vale il teo. di unicità