SSSUP 2011 — LEZIONE 14

<u>Proprietà delle derivate</u> Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile (non sto dicendo che la derivata è continua).
Allora per ogni $x_0 \in (a,b)$, esiste una successione $x_n \to x_0$ (anzi ne esiste una che tende a x_0^+ ed una che tende a x_0^-) tale che $f'(x_n) \to f'(x_0)$.

<u>Oss.</u> Questo impedisce ad una derivata di avere discontinuità di tipo salto (cioè con limite destro e sinistro in x_0 che esistono e sono diversi)

<u>Oss.</u> La proprietà implica in particolare che per ogni $x_0 \in (a,b)$

$$\liminf_{x \to x_0^+} f'(x) \leq f'(x_0) \leq \limsup_{x \to x_0^+} f'(x)$$

e idem per $x \to x_0^-$.

<u>Dim.</u> $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{n \to +\infty} \dfrac{f(x_0+\frac{1}{n}) - f(x_0)}{\frac{1}{n}}$

Applico Lagrange tra x_0 e $x_0 + \frac{1}{n}$: $f(x_0+\frac{1}{n}) - f(x_0) = f'(x_n)\cdot\frac{1}{n}$
Quindi $f'(x_0) = \lim_{n \to +\infty} f'(x_n)$.

— o — o —

<u>Esempio 1</u> $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ (estesa ponendo $f(0) = 0$).
È lipschitziana in $[-1,1]$? Guardo

$$f'(x) = \sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2} = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$

Questa NON è limitata (basta trovare una successione $x_n \to 0^+$ con $\cos\frac{1}{x_n} = 1$), anzi

$$\liminf_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty \qquad \limsup_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

Esempio 2 $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ (estesa ponendo $f(0)=0$)
Questa è Lipschitziana in $[-1,1]$. Infatti

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cancel{x^2} \cos \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x^2}} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, \text{ da cui}$$

$|f'(x)| \leq 3$ per ogni $x \in [-1,1]$, tranne al più $x=0$.
In $x=0$ la derivata si calcola con il rapp. increm. e viene $f'(0)=0$.

—o—o—

Teorema Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che f^2 sia Lipschitz. Allora f è $\frac{1}{2}$- Hölder.

Dim. Per ipotesi sappiamo che $|f^2(x) - f^2(y)| \leq L|x-y| \quad \forall \ldots$

$\boxed{\text{Caso 1}}$ Supponiamo che $0 \leq f(y) \leq f(x)$. Allora

$$|f(x) - f(y)| = \left|\sqrt{f^2(x)} - \sqrt{f^2(y)}\right| \underset{\sqrt{A}-\sqrt{B} \leq \sqrt{A-B}}{\leq} \sqrt{f^2(x) - f^2(y)} \leq \sqrt{L}\,|x-y|^{1/2}$$

Idem se $f(y) \leq f(x) \leq 0$.

$\boxed{\text{Caso 2}}$ Supponiamo che $f(y) < 0 < f(x)$. Per continuità esiste z tra x e y t.c. $f(z)=0$.
Ma allora

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f(z)| + |f(y) - f(z)| \qquad \text{Applico caso 1}$$

$$\leq \sqrt{L}\,|x-z|^{1/2} + \sqrt{L}\,|y-z|^{1/2} \qquad (z \text{ sta tra } x \text{ e } y)$$

$$\leq \sqrt{L}\,|x-y|^{1/2} + \sqrt{L}\,|x-y|^{1/2}$$

$$= 2\sqrt{L}\,|x-y|^{1/2}$$

Con più attenzione potevo ottenere $\sqrt{2L}$ invece di $2\sqrt{L}$.

—o—o—

Esempio 3 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ (estesa con $f(0) = 0$) è $\frac{1}{2}$-Hölder in $[-1, 1]$, anzi è α-Hölder $\iff \alpha \leq \frac{1}{2}$.

Motivo $f^2(x) = x^2 \sin^2 \frac{1}{x}$ è Lip. (basta fare la derivata).

Achtung! f $\frac{1}{2}$-Hölder $\not\Rightarrow$ f^2 Lipschitz. Di conseguenza il criterio va bene per dimostrare l'Hölderianità, ma non per escluderla (questo va fatto a mano)

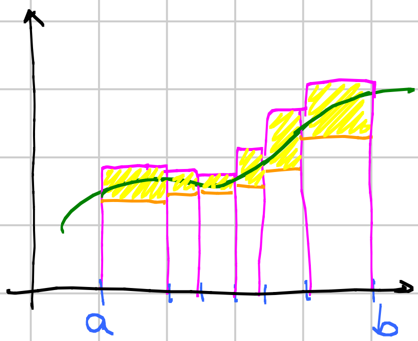
Controesempio: $f(x) = \sqrt{x} + 1$ è $\frac{1}{2}$-Hölder, ma f^2 non è Lip.

Esercizio Trovare $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ che sia continua, dunque uniformemente continua, ma non Hölderiana per nessun esponente $\alpha \in (0, 1)$. Se $f(0) = 0$, deve andare a 0 più violentemente di tutte le radici.

—o—o—

Integrabilità delle funzioni continue Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora $f(x)$ è integrabile in $[a, b]$.

Voglio, per ogni $\varepsilon > 0$, trovare 2 funzioni a gradino i cui integrali (definiti come somma algebrica delle aree dei rettangoli) differiscano per meno di ε.



Idea della dim. Fisso $\varepsilon > 0$, trovo il δ corrispondente, e suddivido $[a, b]$ in intervallini tutti di ampiezza $\leq \delta$. In ogni intervallino ho che $\max f - \min f \leq \varepsilon$ (è la differenza tra i valori assunti in 2 p.ti). In ogni intervallino definisco le 2 funzioni a gradino usando $\max f$ e $\min f$ ed è fatta.

—o—o—

__Teorema di estensione__ Sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione continua.
Se f è uniformemente continua (in particolare se è Lip. o Hölder), allora esiste una funzione continua $g: \bar{A} \to \mathbb{R}$

chiusura di A

tale che $g(x) = f(x)$ per ogni $x \in A$.
Detto altrimenti: le funzioni unif. continue si estendono alla chiusura dell'insieme.

"Non dimostrazione": bisogna far vedere che esiste il limite nei punti del bordo di A, escludendo che possa divergere o oscillare.

__Esercizio__ Sia $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uniformemente continua.
Allora f è sublineare, cioè esistono due costanti A e B tali che

$$|f(x)| \leq A + Bx$$