SSSUP 2011 - LEZIONE 13

Titolo nota 08/04/2011

<u>Moduli di continuità</u>: LIPSCHITZIANITÀ, HÖLDERIANITÀ, UNIFORME CONTINUITÀ.

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ (vale anche con $f: A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$)

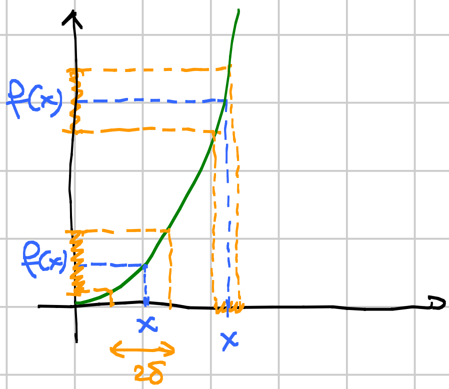
<u>Continuità</u> $\forall x \in [a,b]$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c.
$y \in [a,b]$, $|y-x| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

<u>Uniforme continuità</u> $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c.
$x \in [a,b]$, $y \in [a,b]$, $|y-x| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

<u>Oss.</u> Nella definizione di continuità δ dipende da ε e da x.
Nell'uniforme continuità δ dipende solo da ε, cioè c'è un δ universale (uniforme in x) che va bene per tutti gli x (fissato ε)

<u>Esempio 1</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$. È continua ma NON unif. continua. Brutalmente: a parità di ε, più vado su x grandi (o molto negativi) più mi serve δ piccolo per avere $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

$\varepsilon = \frac{1}{2}$ quadretto



<u>Esempio 2</u> $f: (0,1] \to \mathbb{R}$ continua, ma non unif. continua, e limitata: $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

<u>Teorema</u> Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ (estremi compresi e intervallo limitato), allora continua $\Rightarrow$ uniformemente continua.

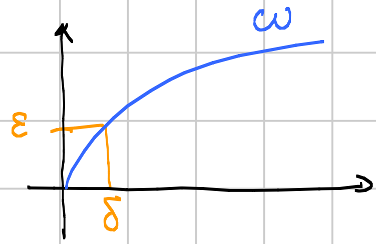
Modulo di continuità È l'applicazione che lega ε e δ.

Sia $\omega : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, e sia $f : A \to \mathbb{R}$.

Si dice che ω è un modulo di continuità per f in A se

$$|f(y) - f(x)| \le \omega(|x-y|) \qquad \forall x \in A, \ \forall y \in A$$

Caso interessante: quello in cui $\omega(0)=0$ e ω è continua



Fissato $\varepsilon>0$, scelgo $\delta>0$ con $\omega(\delta)=\varepsilon$.

Allora se $|x-y| \le \delta$ si ha che

$$|f(y) - f(x)| \le \omega(\delta) = \varepsilon$$

— o — o —

Lipschitzianità Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice LIPSCHITZIANA in A se esiste una costante $L \in \mathbb{R}$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \le L\,|x-y| \qquad \forall x \in A, \ \forall y \in A$$

Questo è equivalente a dire che $\omega(\sigma) = L\sigma$ è un modulo di continuità (in questo caso lineare) per f.

Si dice costante di Lipschitz di $f(x)$ in A il più piccolo L per cui funziona la definizione.

Hölderianità Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice HÖLDERIANA in A con esponente $\alpha \in (0,1)$ se esiste una costante $H \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|f(x) - f(y)| \le H\,|x-y|^{\alpha} \qquad \forall x \in A, \ \forall y \in A.$$

È come dire che un modulo di continuità è $\omega(\sigma) = H\sigma^{\alpha}$.

Si dice costante di Hölder il + piccolo H t.c. ...

Oss. Lipschitzianità = Hölderianità di esponente $=1$.

Esempio $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ definita da $f(x) = \sqrt{x}$ è Hölderiana di esponente $\frac{1}{2}$, ma non Lipschitziana.

Infatti $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \le \sqrt{|x-y|} \qquad \forall x \ge 0 \ \forall y \ge 0$

Come si dimostra? wlog (without loss of generality)

$x \geq y$, quindi $\sqrt{x} \geq \sqrt{y}$. Mi riduco a

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y}\,, \quad \text{cioè} \quad \sqrt{x} \leq \sqrt{y} + \sqrt{x-y} \quad \text{e faccio i } \square.$$

— o — o —

<u>Oss.</u> Se una funzione è α - Hölderiana con $\alpha > 1$, allora è per forza (localmente) costante. Infatti la sua derivata è 0 ovunque in quanto

$$|f(x+h) - f(x)| \leq H\,|h|^{\alpha}$$

quindi

$$|f'(x)| = \lim_{h \to 0} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|} \leq \lim_{h \to 0} H \cdot \underbrace{\boxed{|h|^{\alpha-1}}}_{\to 0 \text{ se } \alpha > 1}$$

Se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in A$, allora $f(x)$ è localmente costante, cioè costante sulle componenti connesse di A, cioè costante in ogni intervallo contenuto in A.

— o — o —

<u>Legami tra Lipschitzianità e derivata.</u> Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \to \mathbb{R}$.

(1) f Lipschitziana $\not\Rightarrow$ f derivabile (esempio $f(x) = |x|$)

(2) f Lipschitziana con una certa costante $L \Rightarrow$ tutti i rapporti incrementali sono, in valore assoluto, $\leq L \Rightarrow$ il grafico ha "pendenza limitata"

(3) f Lipschitziana con costante L + esiste $f'(x_0) \Rightarrow |f'(x_0)| \leq L$

(4) Se f è derivabile in tutti i p.ti di A, e

$$\sup \{ |f'(x)| : x \in A \} < +\infty,$$

allora f è Lipschitziana e la sua costante di Lip. è proprio il sup di sopra (valida se A è connesso (1 pezzo solo)).

<u>Dim (4)</u>. Sia L il sup. Per Lagrange abbiamo che

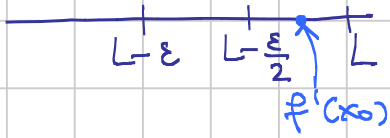
$$|f(y) - f(x)| = \underbrace{|f'(\xi)|}_{\leq L} \cdot |y-x| \leq L \cdot |y-x|$$

Resta da dimostrare che L è la più piccola costante che va bene, cioè che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono 2 p.ti x e y t.c.

$$|f(y) - f(x)| > (L-\varepsilon)\,|y-x|.$$

Fisso $\varepsilon > 0$. Per definizione di sup esiste un p.to x_0 t.c.

$$|f'(x_0)| > L - \frac{\varepsilon}{2}$$



Ora

$$|f'(x_0)| = \lim_{h \to 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0)|}{|h|}$$

Se il limite è $> L - \frac{\varepsilon}{2}$, c'è almeno un valore di h per cui la frazione è $> L - \varepsilon$. Questo produce i p.ti x e y richiesti.

—o—o—

<u>Rapporto tra le definizioni</u> Sia A un insieme <u>limitato</u>, e sia $f: A \to \mathbb{R}$. Allora si hanno le seguenti implicazioni

$$f \text{ Lipschitziana in } A \Rightarrow f \text{ Hölderiana in } A \text{ con ogni } \alpha \in (0,1)$$
$$\Downarrow$$
$$f \text{ uniformemente continua}$$
$$\Downarrow$$
$$f \text{ continua}$$

Inoltre dati $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$ si ha che

$$f\ \alpha_2\text{-Hölderiana} \Rightarrow f\ \alpha_1\text{-Hölderiana (sempre in } A).$$

<u>Dim.</u> Se f è α_2-Hölderiana, allora

$$|f(y) - f(x)| \leq H\,|y-x|^{\alpha_2} \qquad \forall x \in A,\ \forall y \in A$$

Ma allora
$$|f(y) - f(x)| \leq H\,|y-x|^{\alpha_1} \cdot |y-x|^{\alpha_2-\alpha_1}$$
$$\leq H \cdot [\text{diametro}(A)]^{\alpha_2-\alpha_1} \cdot |y-x|^{\alpha_1}$$

Il diametro (A) è $\sup A - \inf A$.

<u>Oss.</u> $f(x) = x$ non è $\frac{1}{2}$-Hölder in $[0, +\infty)$, quindi la limitatezza di A serve per avere le implicazioni.