

Esercizio

$$a_{n+1} = 7 + \frac{a_n}{2} + \frac{1}{n} \quad a_1 = \alpha \geq 0$$

Possibili limiti reali: supponiamo $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$. Allora

$$a_{n+1} = 7 + \frac{a_n}{2} + \frac{1}{n}$$

$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$
 $l = 7 + \frac{l}{2} + 0 \Rightarrow l = 14$

Fatto 1 a_n è limitata

Dimostro per induzione che $a_n \leq 100 + \alpha$

[n=1] : banale

[n ⇒ n+1] Ipotesi: $a_n \leq 100 + \alpha$

$$a_{n+1} = 7 + \underbrace{\frac{a_n}{2} + \frac{1}{n}}_{\text{uso Hp}} \leq 7 + 50 + \frac{\alpha}{2} + 1 = 58 + \frac{\alpha}{2} \leq 100 + \alpha$$

Fatto 2 Se per un certo α esiste n_0 t.c. $a_{n_0+1} \leq a_{n_0}$, allora $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni $n \geq n_0$ (ovviamente per quel valore di α).

Dim.: induzione a partire da n_0 ...

$$a_{n+2} = 7 + \frac{a_{n+1}}{2} + \frac{1}{n+1} \leq 7 + \frac{a_n}{2} + \frac{1}{n} = a_{n+1}$$

$\uparrow$
 uso ipotesi induttiva che $a_{n+1} \leq a_n$ e
 il fatto che $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$

Oss. Questo "conservarsi in futuro" vale per la monotonia decrescente ma non per la monotonia crescente.

Fatto 3 Per ogni α la successione a_n è definitivamente monotona

Dici. Ci sono due casi:

- a_n è sempre crescente (e allora bene)
- $a_{n+1} \leq a_n$ per un qualche n , ma allora da lì in poi è decrescente.

Fatto 4 In ogni caso il limite esiste e vale $1/4$.

Domanda: sicuramente esistono valori di α per cui è definitivamente decrescente: ad esempio $\alpha = 100$.
Ma esistono dei valori per cui è sempre crescente?

Tentativo: considero la successione $b_n = a_n - 1/4$. Cosa risolve?

$$b_{n+1} = a_{n+1} - 1/4 = 7 + \frac{a_n}{2} + \frac{1}{n} - 1/4 = 7 + \frac{b_n + 1/4}{2} + \frac{1}{n} - 1/4 = \frac{b_n}{2} + \frac{1}{n}$$

quindi $b_{n+1} = \frac{b_n}{2} + \frac{1}{n}$. Ora a_n è crescente $\Leftrightarrow b_n$ è crescente

Esistono valori di b_0 , ovviamente negativi, per cui b_n risulta crescente?

Fatto 5 Non ne esistono. Infatti $b_n \rightarrow 0$. Se fosse crescente, sarebbe $b_n \leq 0$ sempre, ma allora

$$b_{n+1} = \frac{b_n}{2} + \frac{1}{n} \geq b_n + \frac{1}{n}$$

$\uparrow$ perché $b_n \leq 0$.

ma allora per induzione

$$b_{n+1} \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} + b_0$$

$\downarrow$
perché la serie diverge, il che è assurdo perché direbbe che $b_n \rightarrow +\infty$.

Esercizio 2 $f(x) = \frac{\arctan x}{3 + \sin x} \quad x \rightarrow +\infty$

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$$

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{8}$$

Per dimostrare un $\limsup$ servono 2 cose

→ una stima dall'alto

→ una successione dal basso

$$f(x) \leq \frac{\arctan x}{2}$$

metto qui qualcosa che abbia come LIMITE quello che voglio essere il $\limsup$, poi uso confronto

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x}{2} = \frac{\pi}{4}$$

↑
confronto

dove sto facendo
il $\limsup$

→ Successione dal basso: trovare una successione $x_n \rightarrow \boxed{+\infty}$ tale che $f(x_n) \rightarrow$ candidato $\limsup$.

In questo caso basta fare in modo che $\sin x_n = -1$, cioè
 $x_n = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$

Per dimostrare un $\liminf$ servono:

→ una stima dal basso, in questo caso

$$f(x) \geq \frac{\arctan x}{4} \quad \text{da cui} \quad \liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) \geq \dots = \frac{\pi}{8}$$

→ una successione dall'alto, in questo caso $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$.

Esercizio 3 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Cosa posso dire di $\max$ e $\min$?

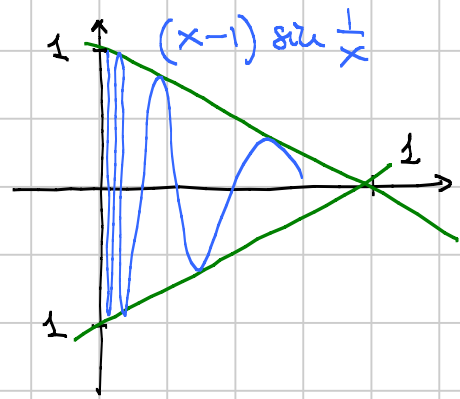
Almeno uno dei due è obbligato ad esistere?

NO! Dopo un po' uno si convince che "sia il sup, sia l'inf devono essere assunti in 0"

Si tratta di porre

$$f(x) = (x-1) \sin \frac{1}{x}$$

e dimostrare che



$$\textcircled{1} -1 < f(x) < 1 \quad \forall x \in (0, 1]$$

$$\textcircled{2} \limsup_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \quad \text{e} \quad \liminf_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$$

Questi dimostrano in particolare che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ non esiste.

Esercizio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(0) = 0$ f derivabile ovunque
 $f'(0) = 100$

È vero che esiste $\delta > 0$ t.c. $f(x)$ è monotona in $(-\delta, \delta)$.