SSSUP 2011 — LEZIONE 11

Titolo nota 06/04/2011

Hôpital per successioni

$\boxed{\text{Caso } \frac{\infty}{\infty}}$ Siano a_n e b_n 2 successioni. Supponiamo che $a_n \to +\infty$ e $b_n \to +\infty$. Supp. anche b_n strett. cresc. Allora

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Mi limito a dimostrare la disuguaglianza di destra supponendo anche che il limsup a dx sia $L \in \mathbb{R}$ (se è $+\infty$ è banale, se è $-\infty$ si aggiusta facilmente: farlo!).

Essendo L il limsup, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \leq L+\varepsilon \qquad \forall n \geq n_0, \quad \text{e quindi (uso denom.} > 0)$$

$$a_{n+1}-a_n \leq (L+\varepsilon)(b_{n+1}-b_n) \qquad \forall n \geq n_0$$

$$\begin{aligned}
a_n &= a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \dots + a_{n_0} \\
&= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_{n_0+1} - a_{n_0}) + a_{n_0} \\
&\leq (L+\varepsilon)\left[(b_n - b_{n-1}) + (b_{n-1} + b_{n-2}) + \dots + (b_{n_0+1} - b_{n_0})\right] + a_{n_0} \\
&= (L+\varepsilon)(b_n - b_{n_0}) + a_{n_0}
\end{aligned}$$

$$\frac{a_n}{b_n} \leq \frac{(L+\varepsilon)(b_n-b_{n_0}) + a_{n_0}}{b_n - b_{n_0} + b_{n_0}} = \frac{\cancel{b_n - b_{n_0}}}{\cancel{b_n - b_{n_0}}} \, \frac{(L+\varepsilon) + \boxed{\frac{a_{n_0}}{b_n - b_{n_0}}}^{\to 0}}{1 + \underbrace{\boxed{\frac{b_{n_0}}{b_n - b_{n_0}}}}_{0}}$$

uso che $b_n \to +\infty$

Ho quindi dimostrato che

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq L+\varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0, \text{ quindi vale anche con } L \text{ e basta.}$$

— o — o —

Osservazione: non ho usato che $a_n \to +\infty$.

$\boxed{\text{Caso } \frac{0}{0}}$ Siano a_n e b_n due successioni con $a_n \to 0$ e $b_n \to 0$. Supponiamo b_n strett. decrescente. Allora

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} \le \liminf_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} \le \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} \le \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}}$$

Dim. Suppongo che il limsup a dx sia $L \in \mathbb{R}$. Fisso $\varepsilon > 0$. Allora $\forall n \ge n_0$ si avrà che

$$\frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} \le (L+\varepsilon), \quad \text{cioè} \quad a_n - a_{n+1} \le (L+\varepsilon)(b_n - b_{n+1})$$

Prendo $k \ge n \ge n_0$. Allora

$$\begin{aligned} a_n &= (a_n - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_{n+2}) + \dots + (a_{k-1} - a_k) + a_k \\ &\le (L+\varepsilon)\left[(b_n - b_{n+1}) + \dots + (b_{k-1} - b_k)\right] + a_k \\ &= (L+\varepsilon)(b_n - b_k) + a_k \end{aligned}$$

Quindi (sfrutto ancora che $b_n > 0$)

$$\frac{a_n}{b_n} \le \frac{(L+\varepsilon)(b_n - b_k) + a_k}{b_n - b_k + b_k} = \frac{\cancel{b_n - b_k}}{\cancel{b_n - b_k}} \cdot \frac{(L+\varepsilon) + \boxed{\frac{a_k}{b_n - b_k}} \to 0}{1 + \boxed{\frac{b_k}{b_n - b_k}} \to 0}$$

n fisso, $k \to +\infty$

Tengo n fisso e mando k all'infinito e ottengo che

$$\frac{a_n}{b_n} \le (L+\varepsilon) \quad \forall n \ge n_0$$ quindi facendo ora $n \to +\infty$

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} \le L+\varepsilon.$$ Essendo ε arbitrario ho finito.

—o—o—

Oss. Ho usato sia che $a_n \to 0$ sia che $b_n \to 0$.

—o—o—

Esercizio $\quad a_{n+1} = a_n\left(a_n + \frac{1}{n}\right) \qquad a_1 = \alpha \geq 0$

Quali sono i possibili comportamenti di a_n.

$\boxed{\text{Fatto 1}}$ Se $\alpha > 1$, allora a_n è monotona crescente e tende a $+\infty$

$$a_{n+1} = a_n\left(a_n + \frac{1}{n}\right) \qquad \text{se } l \in \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ l & = & l & \cdot & l \end{array} \qquad l = l^2 \Rightarrow l = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \text{ incompatibili}$$

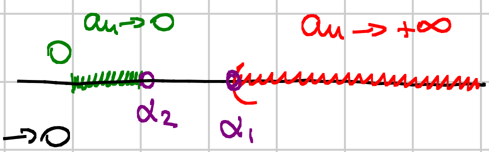
$\boxed{\text{Fatto 2}}$ Se per un certo α si ha che $a_n(\alpha) \to +\infty$, allora per ogni $\beta > \alpha$ si ha che $a_n(\beta) \to +\infty$

Dim. Per induzione si verifica che $a_n(\beta) > a_n(\alpha)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\boxed{\text{Fatto 3}}$ Se per un certo α si ha che $a_n(\alpha) \to +\infty$, allora esiste un intorno U di α tale che $a_n(\beta) \to +\infty$ per ogni $\beta \in U$.

Conseguenza: l'insieme degli α per cui va a $+\infty$ è aperto.

Dim. Prendo α t.c. $a_n(\alpha) \to +\infty$. Allora esiste n_0 t.c. $a_{n_0}(\alpha) > 1$. Per continuità esiste un intorno U di α t.c. $a_{n_0}(\beta) > 1$ per ogni $\beta \in U$. Ma allora per tutti questi β ricadiamo nel fatto 1.
Ho usato la continuità della funzione $\alpha \to a_{n_0}(\alpha)$ ad indice n_0 fisso.
La continuità ad indice fisso si dimostra per induzione sull'indice (composizione di funzioni continue). Sono addirittura polinomi...



$\boxed{\text{Fatto 4}}$ Esistono $\alpha > 0$ per cui $a_n(\alpha) \to 0$

Dim. Vediamo se è vero per induzione che $a_n \leq \frac{1}{2n}$

Nel passo induttivo mi ritrovo

$$a_{n+1} \underset{\text{ric}}{=} a_n\left(a_n + \frac{1}{n}\right) \underset{\text{ip. ind.}}{\leq} \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n}\,\frac{3}{2n} = \frac{3}{4n^2} \underset{\text{spero}}{\leq} \frac{1}{2n+2}$$

Speranza $\iff 6n+6 \le 4n^2 \iff 3n+3 \le 2n^2 \iff n \ge 3$

Quindi basta che $a_3 \le \frac{1}{6}$ per garantirmi che $a_n \to 0$.
Se metto $\alpha = 0$ avrò che $a_3(\alpha) = 0 < \frac{1}{6}$, quindi lo stesso vale per α vicini.

$\boxed{\text{Fatto 5}}$ Se per un certo $\alpha > 0$ ho che $a_n(\alpha) \to 0$, allora lo stesso vale per ogni $0 \le \beta \le \alpha$ (come il fatto 2).

$\boxed{\text{Fatto 6}}$ Se per un certo n_0 si ha che $a_{n_0+1} < a_{n_0}$, allora $a_{n+1} \le a_n \ \forall n \ge n_0$, quindi è monotona decrescente, quindi ha limite $l = 0$ (il limite 1 non è possibile in quanto $a_{n_0} < 1$, altrimenti sarebbe $a_{n_0} < a_{n_0+1}$)

Dim. Per induzione

$$a_{n+2} = a_{n+1}\left(a_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) \le a_n\left(a_n + \frac{1}{n}\right) = a_{n+1}$$

Uso ipotesi + fatto che $\frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n}$

$\boxed{\text{Fatto 7}}$ L'insieme degli α per cui $a_n(\alpha) \to 0$ è aperto.

Dim. Se $a_n(\alpha) \to 0$, allora $\exists\, n_0$ t.c. $a_{n_0+1}(\alpha) < a_{n_0}(\alpha)$, allora per continuità la stessa cosa vale $\forall \beta \in$ intorno U di α. Ma allora per il fatto 6 si ha che $a_n(\beta) \to 0$.

$\boxed{\text{Fatto 8}}$ Per ogni $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ si ha che $a_n(\alpha) \to 1$.

Dim. Sappiamo che per tali α si ha che $a_n(\alpha) \le 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ (se lo supera siamo in zona rossa) e che $a_{n+1}(\alpha) \ge a_n(\alpha)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (se ci fosse la disug. opposta, saremmo in zona verde). Quindi $a_n(\alpha) \to l \in \mathbb{R}$ e l'unico limite possibile rimasto è $l = 1$.

$\boxed{\text{Fatto 9}}$ $\alpha_1 = \alpha_2$. Supponiamo $\alpha_1 > \alpha_2$. Allora $a_n(\alpha_1) > a_n(\alpha_2)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre

$$\underbrace{a_{n+1}(\alpha_1) - a_{n+1}(\alpha_2)}_{\text{Diff}_{n+1}} = a_n(\alpha_1)\left[a_n(\alpha_1) + \frac{1}{n}\right] - a_n(\alpha_2)\left[a_n(\alpha_2) + \frac{1}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[a_n(\alpha_1) - a_n(\alpha_2)\right] + \left[a_n(\alpha_1) - a_n(\alpha_2)\right]\left[\ldots + \ldots\right]$$

$$= \underbrace{\left[a_n(\alpha_1) - a_n(\alpha_2)\right]}_{\text{Diff}_n} \underbrace{\left[\frac{1}{n} + a_n(\alpha_1) + a_n(\alpha_2)\right]}_{\to 2}$$

Ma allora definitivamente $\text{Diff}_{n+1} \geq \frac{3}{2}\,\text{Diff}_n$

Questo direbbe che $\text{Diff}_n \to +\infty$, mentre sappiamo che $\text{Diff}_n \to 0$.

— o — o —