

Successioni per ricorrenza non autonome $a_{n+1} = f(n, a_n)$

Esempio 1 $a_{n+1} = \frac{3a_n + \arctan n}{a_n + \sqrt{n+3}}$ $a_0 = 2011$

Idea: il denominatore (ed in particolare $\sqrt{n+3}$) trascina tutto a 0.
Come dimostrarlo?

PIANO (i) $0 \leq a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (M va scelto opportunamente)
(ii) $a_n \rightarrow 0$

Dim. (ii) Dal p.to (i) io so che

$$\boxed{0} \leq a_{n+1} \leq \frac{\boxed{3M + \frac{\pi}{2}}}{\sqrt{n+3}}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 0 0

Dal teo. dei carabinieri ottengo che $a_{n+1} \rightarrow 0$, quindi anche $a_n \rightarrow 0$.

Dim. (i) Per induzione: $a_n \geq 0$ è banale

Per $a_n \leq M$ al passo induttivo mi trovo

$$a_{n+1} \leq \frac{3M + \frac{\pi}{2}}{\sqrt{n+3}} \leq M$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 maggiorazione $\uparrow$ spero
 come sopra

La speranza si realizza non appena n è abbastanza grande.
Occhio a non dire: il termine centrale tende a 0 per $n \rightarrow \infty$, quindi è banale. Il valore di M deve anche soddisfare il passo base !!!

Fatto per bene: per ogni $n \geq 13$ ho che

$$\frac{3M + \frac{\pi}{2}}{\sqrt{n+3}} \leq \frac{3M + \frac{\pi}{2}}{4} \leq M$$

$\uparrow$
 se M è grande in modo quantificabile

$M \geq \frac{\pi}{2}$

Allora, volendo fare le cose per bene, pongo

$$M = a_0 + a_1 + \dots + a_{13} + \frac{\pi}{2}$$

e dimostro per induzione che $a_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Questo è banale per $n \leq 13$ e dopo funziona il passo induttivo.

— o — o —

Esempio 2 $a_{n+1} = \sqrt[n]{5 + a_n}$ $a_1 = 2011$

Idea: $a_n \rightarrow 1$ (esercizio: provare a scrivere un piano con la monotonia e vedere quanto è difficile dimostrarlo).

PIANO ALTERNATIVO (i) $1 \leq a_n \leq \sqrt[n]{10.000}$ $\forall n \geq 1$ (induzione)
(ii) $a_n \rightarrow 1$ (carabinieri)

Esempio 3 $a_{n+1} = \sqrt[n]{5n + a_n}$ $a_1 = 2011$

PIANO (i) $1 \leq a_n \leq M$ $\forall n \geq 1$ (induzione scegliendo M)
(ii) $a_n \rightarrow 1$ (carabinieri)

Osservazione: posso sostituire (i) con qualcosa di abbondante, tipo $1 \leq a_n \leq 10000n$ $\forall n \geq 1$

Dim nuovo (i) Passo induttivo di $a_n \leq 10.000 n$

$$a_{n+1} = \sqrt[n]{5n + a_n} \leq \sqrt[n]{10.005 n} = \sqrt[n]{10.005} \cdot \sqrt[n]{n} \leq 10.000 \cdot (n+1)$$

$\uparrow$
speso

D'altra parte $\sqrt[n]{10.005} \leq \sqrt{10.005} \leq 10.000$ appena $n \geq 2$ e $\sqrt[n]{n} \leq n \leq n+1$ appena $n \geq 1$.

Non resta che fare i passi base $n=1$ ed $n=2$.

— o — o —

Esempio 3 $a_{n+1} = n \cdot a_n^2$ $a_1 = \alpha$

Fatto 1 Per ogni $\alpha \geq 1$ si ha che $a_n \rightarrow +\infty$ (dimostrare!)

Fatto 2 Per $\alpha = \frac{1}{2}$ si ha che $a_n \rightarrow 0$. Un possibile piano è dimostrare che $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2^n}$ per ogni $n \geq 1$

↓
induzione: $a_{n+1} = n \cdot a_n^2$

$$\leq n \cdot \frac{1}{2^{2n}} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \quad \uparrow \text{spero}$$

3peranza: $\frac{n}{2^{2n}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$, cioè $\frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{2}$,

cioè $2^{n-1} \geq n$ e questa si fa

- o a sua volta per induzione
- o con Bernoulli: $2^{n-1} = (1+1)^{n-1} \geq 1 + (n-1) \cdot 1 = n$

(Nota bene: provare a vedere che succede cercando di dimostrare che $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$) (Provare anche con $\frac{1}{n^2}$).

Idea: esiste una SOGLIA α_* tale che

- per $0 \leq \alpha < \alpha_*$ si ha che $a_n \rightarrow 0$
- per $\alpha > \alpha_*$ si ha che $a_n \rightarrow +\infty$
- per $\alpha = \alpha_*$ è delicato.

Ora ci poi indico con $x_n(\alpha)$ la successione ottenuta a partire da $x_1 = \alpha$.

Fatto 3 Fissato n si ha che $x_n(\alpha)$, come funzione di α è continua e monotona crescente.

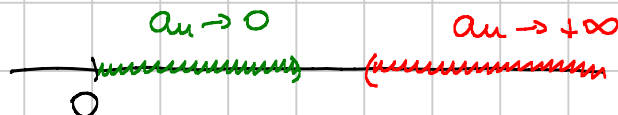
Fatto 4 Se per un certo α esiste $n \geq 1$ t.c. $x_n(\alpha) \geq 1$, allora di sicuro $x_n \rightarrow +\infty$ per quel valore di α .

Fatto 5

L'insieme degli α per cui tende a $+\infty$ è una semiretta destra, con o senza estremo

Fatto 6

L'insieme degli α per cui tende a 0 è un intervallo, con o senza estremo destro. Quindi questa è la situazione



Chi sono i candidati ad essere α_* ? Il sup della zona in cui $a_n \rightarrow 0$ o l'inf di quella in cui $a_n \rightarrow +\infty$.

Fatto 7

La zona rossa è aperta, cioè il suo inf non è in zona rossa.

Supponiamo che per un certo α_0 si abbia che $x_n \rightarrow +\infty$. Allora $\exists n_0 \geq 1$ t.c. $x_{n_0}(\alpha_0) \geq 100$. Poiché $x_{n_0}(\alpha)$, come funzione di α , è continua, vuol dire che $x_{n_0}(\alpha) > 1$ in un intorno di α_0 .



Allora tutto l'intorno di α_0

sta in zona rossa, dunque la zona è aperta.

Questo dice che l'inf. della zona rossa non sta in zona rossa.

Fatto 8

Se per un certo α si ha che $x_{n_0+1} \geq x_{n_0}$, allora per quel valore di α si ha che x_n è sempre crescente da n_0 in poi (banale induzione), quindi ha limite, quindi tende a $+\infty$.

Fatto 9

Prendo $\alpha_* = \inf$ zona rossa.

Partendo da α_* non tende a $+\infty$, quindi non posso avere nemmeno per un valore di n , che $x_{n+1} \geq x_n$, quindi $x_n \searrow$, quindi ha limite, e tale limite è 0.