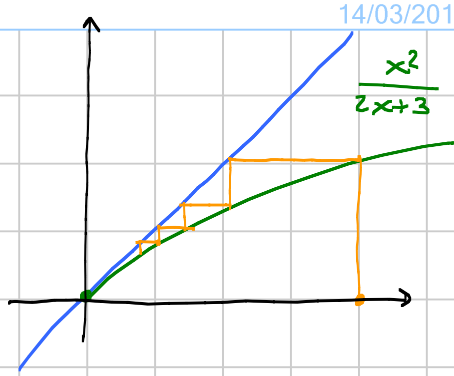
SSSUP 2011 - LEZIONE 09

Titolo nota 14/03/2011



Esempio 1 $\quad a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2a_n+3} \qquad a_0 = 2011$

$$f(x) = \frac{x^2}{2x+3} \leq \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2} \leq x \quad \text{per } x>0$$

Si dim. facilmente che $a_n \to 0$. Come ?

In questo caso va a zero esponenzialmente.

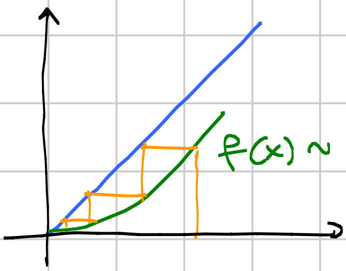
Idea: poiché $f(x) \leq \frac{x}{2}$ per ogni $x>0$ avremo che $a_{n+1} \leq \frac{a_n}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, da cui per induzione si ottiene che

$$a_n \leq \frac{a_0}{2^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Cosa c'è di speciale nel coeff. $\frac{1}{2}$? $\quad f'(x) = \frac{2x(2x+3)-2x^2}{(2x+3)^2}$

$$= \frac{4x^2+6x-2x^2}{(2x+3)^2} = \frac{2x^2+6x}{(2x+3)^2}$$

quindi in realtà il disegno è così



Quindi quando $a_n \to 0$ è come se stessi studiando $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{3}$, quindi $a_n \to 0$ molto più che esponenzialmente.

Calcolo $\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\boxed{a_n \cdot 2^{n^2}}}_{b_n}$. Uso criterio rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1} \cdot 2^{(n+1)^2}}{a_n \cdot 2^{n^2}} = \frac{\frac{a_n^{\cancel{2}}}{2a_n+3} \cdot 2^{\cancel{n^2}+2n+1}}{\cancel{a_n} \cdot \cancel{2^{n^2}}} =$$

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{2a_n+3} \cdot 2 \cdot 4^n$ quindi mi sono ridotto a calcolare

$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\boxed{a_n \cdot 4^n}}_{c_n}$ Faccio a sua volta il rapporto e ottengo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1} \cdot 4^{n+1}}{a_n \cdot 4^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{2a_n+3} \cdot 4 = 0$$

Conclusione: $\frac{c_{n+1}}{c_n} \to 0 \Rightarrow c_n \to 0 \Rightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} \to 0$

$$\Rightarrow b_n \to 0 \Rightarrow a_n \cdot 2^{n^2} \to 0.$$

Volendo farsi un'idea migliore, facciamo finta che sia $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{3}$, e da qui otterremmo qualcosa del tipo

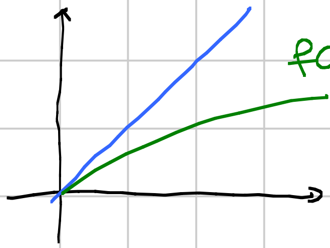
$a_n \sim c^{2^n}$ con $c < 1$. Esercizio: provare a fare rigorosamente

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot 2^{2^n}$$

(si tratta di fare un po' di rapporti...

—o—o—

<u>Esempio 2</u> $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n+2}$ $a_0 = 2011$



Ora quando $a_n \to 0$ è come fare $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$, quindi mi aspetto un andamento del tipo $a_n \sim \frac{c}{2^n}$.

Cosa può voler dire rigorosamente che $a_n \sim \frac{c}{2^n}$.
Ad esempio dovrebbe succedere che $\sqrt[n]{a_n} \to \frac{1}{2}$.
Per dimostrarlo uso il criterio rapporto $\to$ radice. Calcolo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{a_n}}{a_n+2} \cdot \frac{1}{\cancel{a_n}} = \frac{1}{2} = f'(0) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

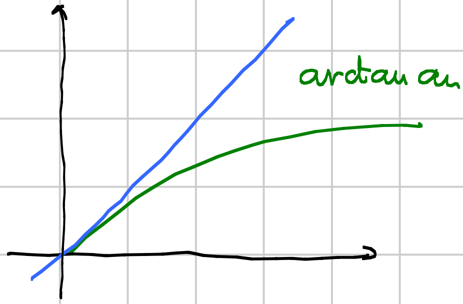
[Più in generale $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{f(a_n)}{a_n} = \frac{f(0+a_n) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(0)}}}{a_n} \to f'(0)$]

Altre cose che succedono: $\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b^n$ con $b > 0$.

Dipende da b: per $b > 2$ il limite è $+\infty$ \} si dimostrano con
per $b < 2$ il limite è 0 \} la radice
per $b = 2$ è MOLTO + delicato.

__Esempio 3__ $a_{n+1} = \arctan a_n$

$a_0 = 2011$



Ancora una volta $a_n \to 0$.

$\boxed{\text{Facciamo finta}}$ di sapere che

$$a_n \sim \frac{\alpha}{n^a}$$

Voglio determinare α ed a. Sostituisco nella ricorrenza:

$$\frac{\alpha}{(n+1)^a} = \arctan \frac{\alpha}{n^a} \sim \frac{\alpha}{n^a} - \frac{1}{3}\frac{\alpha^3}{n^{3a}}$$

Uso $\arctan x \sim x - \frac{1}{3}x^3$

Da questa uguaglianza provo a ricavare α ed a

$$\frac{1}{(n+1)^a} = \frac{1}{n^a} - \frac{1}{3}\frac{\alpha^2}{n^{3a}}$$

$$\frac{1}{\cancel{n^a}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-a} = \frac{1}{\cancel{n^a}} - \frac{1}{3}\frac{\alpha^2}{\cancel{n^a}\cdot n^{2a}} ; \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-a} = 1 - \frac{\alpha^2}{3}\frac{1}{n^{2a}}$$

$(1+x)^b \sim 1 + bx + \dots$

$$\cancel{1} - \frac{a}{n} = \cancel{1} - \frac{\alpha^2}{3}\frac{1}{n^{2a}}$$

Quindi $a = \frac{1}{2}$ e $\alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}$, cioè $a_n \sim \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$

__Esercizio__ Supponendo in generale che sia $a_{n+1} = f(a_n)$ con $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$ e $f(x) = x + bx^k + o(x^k)$, determinare come va a zero a_n facendo finta di sapere che $a_n \sim \frac{\alpha}{n^a}$.

Come rendere rigoroso il discorso fatto nell'esempio. Voglio calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot \sqrt{n}$$ e sperare che venga $\sqrt{\frac{3}{2}}$, oppure

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^2 \cdot n = \frac{3}{2}, \text{ oppure } \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n^2}} = \frac{3}{2}$$

Hôpital per successioni Devo calcolare $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$. Supponiamo $a_n \to +\infty$, $b_n \to +\infty$, e (forse) che b_n strett. cresc. Allora

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

Se gli estremi coincidono, bla...

— o — o —

Dando per buono Hôpital per successioni, nell'esempio mi ritrovo

è sparito n

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)-n}{\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{1}{a_n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\boxed{1}}{\frac{1}{\arctan^2 a_n}-\frac{1}{a_n^2}} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{1}{\frac{1}{\arctan^2 x}-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0} \frac{x^2\arctan^2 x}{x^2-\arctan^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{x^4+o(x^4)}{x^2-\left(x-\frac{1}{3}x^3+o(x^4)\right)^2} = \lim_{x\to0} \frac{x^4+o(x^4)}{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)} \to \frac{3}{2}$$

<u>Esercizio</u> Rendere rigoroso l'esercizio precedente usando Hôpital per successioni.