SSSUP 2011 – LEZIONE 08

Titolo nota 07/03/2011

<u>Teorema di confronto</u> Se $a_n \le b_n$ definitivamente, allora

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \le \liminf_{n\to+\infty} b_n, \qquad \limsup_{n\to+\infty} a_n \le \limsup_{n\to+\infty} b_n$$

<u>Teoremi algebrici</u> Scordateveli! Almeno in forma classica...

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n + \liminf_{n\to+\infty} b_n \le \liminf_{n\to+\infty} (a_n+b_n)$$

$$\limsup_{n\to+\infty} (a_n+b_n) \le \limsup_{n\to+\infty} a_n + \limsup_{n\to+\infty} b_n$$

Dim.: esercizio usando la parte "definitivamente" delle caratterizzazioni.

<u>Esempio</u>: $a_n = 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$

$b_n = 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$

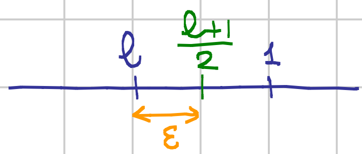
<u>Esercizio</u>: esplorare liminf e limsup del prodotto...

— o — o —

<u>Criterio della radice</u> Sia a_n una successione con $a_n \ge 0$ defin.

- Se $\liminf \sqrt[n]{a_n} > 1$, allora $a_n \to +\infty$;
- se $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, allora $a_n \to 0$.

<u>Dim. 2° caso</u> Sia $\ell = \limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$



Allora definitivamente

$$\sqrt[n]{a_n} \le \frac{\ell+1}{2}$$

elevando alla n:

$$0 \le a_n \le \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

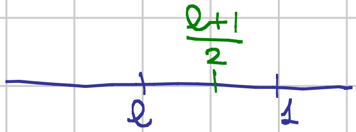
$$0 \qquad 0 \qquad 0$$

per Carabinieri

— o — o —

<u>Criterio del rapporto</u> Sia $a_n > 0$ definitivamente. Allora come nel criterio della radice con $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ al posto di $\sqrt[n]{a_n}$.

<u>Dim. 2° caso</u> $\limsup\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell < 1$



Allora $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{\ell+1}{2} \quad \forall n \geq n_0$

Da qui per induzione si ottiene che

$$\underset{\substack{\downarrow\\0}}{\boxed{0}} \leq a_n \leq a_{n_0} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\boxed{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0}}} \qquad \forall n \geq n_0$$

Conclusione con i carabinieri

— o — o —

<u>Criterio rapporto → radice</u> Sia $a_n > 0$ definitivamente. Allora

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

In particolare: se il rapporto ha un limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, allora la radice ha lo stesso limite.

<u>Esempio classico</u>: $a_n = 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots$
Allora $\sqrt[n]{a_n} \to 1$, $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$, $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$.

<u>Dim.</u> Faccio disuguaglianza di destra nel caso in cui $\limsup\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in \mathbb{R}$ (il caso $+\infty$ è banale)

Fisso $\varepsilon > 0$ e per la caratterizzazione $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L + \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0$$

Come prima per induzione: $a_n \leq a_{n_0} \cdot (L+\varepsilon)^{n-n_0} \quad \forall n \geq n_0$

Faccio la radice n-esima a dx e sx e conservo i versi:

$$\sqrt[n]{a_n} \le \sqrt[n]{a_{n_0}} \cdot (L+\varepsilon)^{\frac{n-n_0}{n}} \qquad \forall n \ge n_0$$

Ora faccio il limsup a dx e sx sfruttando il teo. del confronto

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \le 1 \cdot (L+\varepsilon)$$

Poichè la disuguaglianza vale per ogni $\varepsilon>0$, vale anche per $\varepsilon=0$.

—o—o—

Oss. Nella dimostrazione abbiamo usato che, dato $a>0$ si ha che $\sqrt[n]{a} \to 1$. Questo va dimostrato a parte con la disuguaglianza di Bernoulli $(1+x)^n \ge 1+nx \quad \forall x>-1$.
La applico con $x = \frac{a-1}{n}$ (che è ≥ 0 se $a \ge 1$) e ho

$$\left(1+\frac{a-1}{n}\right)^n \ge 1+n\,\frac{a-1}{n} = a$$

da cui

$$\underset{\downarrow \atop 1}{\boxed{1}} \le \underset{\downarrow \atop 1}{\sqrt[n]{a}} \le \underset{\downarrow \atop 1}{\boxed{1+\frac{a-1}{n}}}$$

Se invece $a\in(0,1)$, posso scrivere $a=\frac{1}{b}$ con $b\ge 1$ e $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$ e ci siamo ricondotti al caso precedente.

—o—o—

Liminf e limsup di funzioni. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, sia $f: A \to \mathbb{R}$, sia x_0 p.to di accumulazione di A.
Un po' brutalmente si definisce

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) = \boxed{\lim_{r\to 0^+}} \sup\{f(x) : x \in \underbrace{([x_0-r, x_0+r]\cap A)\setminus\{x_0\}}_{\neq\emptyset \text{ perchè } x_0 \text{ è di accumulazione}}\}$$

esiste perchè il sup è monotono come funz. di r

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \lim_{r\to 0^+} \inf\{\ \dots\ \}$$

Il "brutale" è relativo al fatto che il sup in questione potrebbe fare $+\infty$ per certi valori di r, quindi bisognerebbe distinguere i casi come nel caso delle successioni.

Approccio "maxlim". Considero tutte le successioni $x_n \to x_0$ (ovviamente con $x_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x_n \neq x_0$) e per cui esiste $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n)$ (andrebbe dimostrato che ce ne sono)

Allora il $\limsup\limits_{x \to x_0} f(x)$ è il massimo di tali limiti.

Detto altrimenti: limsup = maxlim, cioè esiste una successione $x_n \to x_0$, con $x_n \in A \setminus \{x_0\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, tale che $f(x_n) \to$ limsup. (idem per il liminf).

Teorema di De L'Hôpital Siano f e g due funzioni e supponiamo che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ sia del tipo } \frac{0}{0} \text{ o } \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Allora

$$\liminf_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \liminf_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

La dimostrazione è una riedizione del caso classico.

— o — o —