SSSUP 2010 - LEZIONE 07

Titolo nota 07/03/2011

LIMINF e LIMSUP

Richiami di topologia in $\mathbb{R}$. $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

- Si dice che x_0 è interno ad A se $\exists\, \varepsilon > 0$ t.c. $\underbrace{(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)}_{\text{intorno con centro } x_0 \text{ e raggio } \varepsilon} \subseteq A$
  Si indica con $\mathring{A}$ l'insieme di tutti i p.ti interni ad A (parte interna di A): $\mathring{A} \subseteq A$
- Si dice che x_0 è aderente ad A se $\forall\, \varepsilon > 0$ si ha che $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Si indica con $\bar{A}$ l'insieme di tutti i punti aderenti ad A (chiusura di A): $A \subseteq \bar{A}$
- Si dice che x_0 sta sul bordo (o frontiera) di A se $\forall\, \varepsilon > 0$ si ha che $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ e $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \emptyset$.
  L'insieme di questi punti si indica con ∂A (frontiera di A).
  Si verifica facilmente che $\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$.
- Si dice che x_0 è un p.to di accumulazione per A se $\forall\, \varepsilon > 0$ si ha che $[(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \cap A] \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$, cioè la prima intersezione è $\neq \emptyset$ e $\neq \{x_0\}$.
  Si verifica che l'insieme dei p.ti di accumulazione è costituito da $\bar{A}$ meno i p.ti isolati di A (un p.to $x_0 \in A$ si dice isolato se $\exists\, \varepsilon > 0$ tale che $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \cap A = \{x_0\}$).
- Si dice che $B \subseteq \mathbb{R}$ è intorno di x_0 se $\exists\, \varepsilon > 0$ t.c.
  $$\underbrace{(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)}_{\text{intorno elementare di } x_0} \subseteq B$$

Operativamente: se una funzione è definita in un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, ha senso calcolarne il limite per $x \to x_0$, dove x_0 è un p.to di accumulazione di A.
La derivata si definisce classicamente nei p.ti interni ad A

Esempio $A = [0,1)$, $\mathring{A} = (0,1)$, $\bar{A} = [0,1]$, $\partial A = \{0,1\}$

Esercizio Trovare $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che $A, \mathring{A}, \overline{\mathring{A}}, \mathring{\overline{\mathring{A}}}, \overline{A}, \mathring{\overline{A}}, \overline{\mathring{\overline{A}}}$ siano 7 insiemi tutti diversi.
Volendo si può anche dimostrare che procedendo non si ottengono insiemi nuovi.

— o — o —

Liminf e limsup di successioni

Esempio: $a_n = (-1)^n$ $\qquad \liminf_{n \to +\infty} (-1)^n = -1 \qquad \limsup_{n \to +\infty} (-1)^n = 1$

$b_n = 2^{(-n)^n} \qquad \liminf_{n \to +\infty} b_n = 0 \qquad \limsup_{n \to +\infty} b_n = +\infty$

$\boxed{\text{LIMSUP}}$ Sia a_n una successione

- Se a_n non è limitata superiormente, allora si pone
$$\limsup_{n \to +\infty} a_n = +\infty$$

- Se a_n è limitata superiormente, cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ si pone
$$S_k = \sup\{a_n : n \geq k\} \quad (\in \mathbb{R} \text{ perché è limitata})$$
e si osserva che S_k è una successione debolmente decrescente e come tale ammette un limite $\in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
Si pone allora
$$\limsup_{n \to +\infty} a_n = \lim_{k \to +\infty} S_k$$

$\boxed{\text{LIMINF}}$

- Se a_n non è limitata inferiormente, allora si pone
$$\liminf_{n \to +\infty} a_n = -\infty$$

- Se a_n è limitata inferiormente, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ si considera
$$I_k = \inf\{a_n : n \geq k\}$$
e si osserva che I_k è debolmente crescente. Si può quindi porre
$$\liminf_{n \to +\infty} a_n = \lim_{k \to +\infty} I_k \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

<u>Oss.</u> Liminf e limsup esistono sempre in $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

<u>Caratterizzazione con gli epsilon</u>

$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $a_n \geq M$ definitivamente

$\limsup_{n \to +\infty} a_n = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $a_n \geq M$ frequentemente, cioè infinite volte.

$\lim_{n \to +\infty} a_n = L \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0$ si ha che
$L - \varepsilon \leq a_n \leq L + \varepsilon$ definitivamente

$\limsup_{n \to +\infty} a_n = L \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0$ si ha che
$a_n \leq L + \varepsilon$ definitivamente
$a_n \geq L - \varepsilon$ frequentemente

$\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $a_n \leq M$ definitiv.

$\limsup_{n \to +\infty} a_n = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $a_n \leq M$ definitivamente

Per il liminf valgono caratterizzazioni analoghe, ed in particol.

$\liminf_{n \to +\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0$ si ha che
$l - \varepsilon \leq a_n$ definitivamente
$l + \varepsilon \geq a_n$ frequentemente.

—o—o—

<u>Rapporti con il limite</u>

① Se esiste $\lim_{n \to +\infty} a_n$, allora liminf e limsup sono uguali a questo limite.

② Se liminf e limsup (che esistono sempre) sono uguali, allora esiste il limite e coincide con loro.

<u>Esercizio di teoria</u> Dedurre le caratterizzazioni ed i rapporti con il limite dalle definizioni di liminf e limsup.

Liminf, limsup e sottosuccessioni

Sia a_n una successione, e sia a_{n_k} una sottosuccessione. Allora si ha sempre che

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \leq \liminf_{k\to+\infty} a_{n_k} \leq \limsup_{k\to+\infty} a_{n_k} \leq \limsup_{n\to+\infty} a_n$$

In particolare: se esiste il limite di a_n, allora i due laterali coincidono, dunque i 2 centrali coincidono, dunque esiste il limite di a_{n_k} e coincide con quello generale.

Dim: semplici proprietà di inf e sup.

— o — o —

<u>Fatto generale</u> Sia a_n una successione. Allora esiste una s.successione a_{n_k} tale che

$$\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} \text{ esiste ed è } \limsup_{n\to+\infty} a_n$$

<u>Dim</u>: sia L il limsup. Faccio il caso in cui $L \in \mathbb{R}$ (gli altri 2 sono più semplici: esercizio). Uso la caratt. con $\varepsilon = 1$. Ho che

$a_n \leq L+1$ definitiv.

$a_n \geq L-1$ frequent.

Quindi esiste un indice n_1 per cui sono verificate entrambe: così ho definito a_{n_1}.

Ora uso caratt. con $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Ho che

$a_n \leq L+\frac{1}{2}$ defin.

$a_n \geq L-\frac{1}{2}$ frequent.

Quindi esiste un indice $n_2 > n_1$ per cui sono ok entrambe

Per induzione definisco l' indice n_{k+1} in maniera tale che $n_{k+1} > n_k$ e per $n = n_{k+1}$ si abbia che

$$a_n \leq L + \frac{1}{k+1} \quad e \quad a_n \geq L - \frac{1}{k+1}$$

A questo p.to è ovvio che $a_{n_k} \to L$.

— o — o —

<u>Osservazione finale</u> Il limsup è anche <u>maxlim</u>, cioè il massimo limite tra tutte le sottosuccessioni che hanno limite.

Analogamente: il liminf è anche <u>minlim</u>.