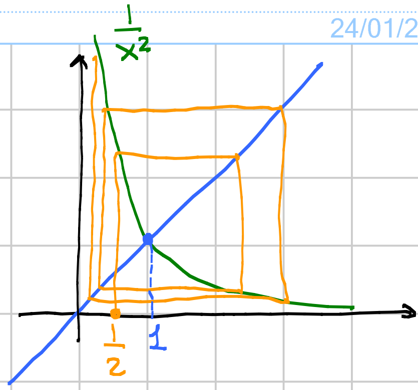
SSSUP 2010 — LEZIONE 06

Titolo nota 24/01/2011



<u>Esempio 1</u> $x_{n+1} = \frac{1}{x_n^2}$ $x_0 = \frac{1}{2}$

Idea: spiraleggiamento "uscente".

$x_0 = \frac{1}{2}$ $x_1 = 4$ $x_2 = \frac{1}{16}$, $x_3 = 256$

Non è vero che la distanza dal presunto limite aumenta!

Altra possibili idea: sui pari tende a 0 (decrescendo), sui dispari tende a $+\infty$ crescendo.

<u>Possibile piano</u>

(i) $0 \le x_{2n} \le \frac{1}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$4 \le x_{2n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_{2n+2} \le x_{2n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$x_{2n+3} \ge x_{2n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

[Induzione sui 2 blocchi applicando $f(x)$]

(iii) $x_{2n} \to \ell \in \mathbb{R}$

$x_{2n+1} \to m \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(Banale dai precedenti)

(iv) $\ell = 0$ e $m = +\infty$

$\boxed{\text{Dim. (iv)}}$ Scrivo la ricorrenza sui pari e sui dispari:

Supponendo per assurdo che sia $m \in \mathbb{R}$ posso passare a limite:

$$\begin{array}{ccc} x_{2n+1} & = & \frac{1}{x_{2n}^2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ m & = & \frac{1}{\ell^2} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} x_{2n+2} & = & \frac{1}{x_{2n+1}^2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell & = & \frac{1}{m^2} \end{array}$$

da cui $\ell \neq 0$ (altrimenti sarebbe $m = +\infty$) e $m\ell^2 = 1 = m^2\ell$.

Essendo m ed $\ell \neq 0$ otterrei $m = \ell = 1$, che sono incompatibili con il p.to (i).

Quindi è assurdo supporre $m \in \mathbb{R}$, quindi $m = +\infty$, quindi (dal 2° limite) $\ell = 0$.

"Alternativa" al piano con i 2 blocchi: esamino separatamente x_{2n} e x_{2n+1}. Pongo $a_n = x_{2n}$. Che cosa risolve a_n?

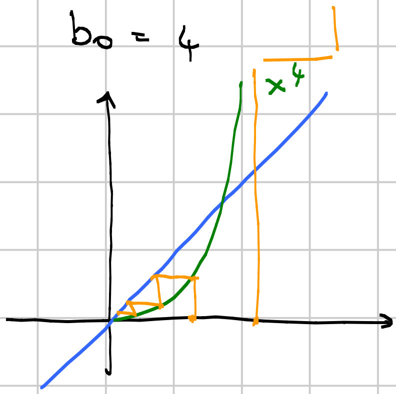
$$a_{n+1} = x_{2n+2} = f(x_{2n+1}) = f(f(x_{2n})) = f(f(a_n))$$

Quindi a_n risolve $a_{n+1} = f(f(a_n))$. Ora $f(f(x))$ è composizione di 2 decrescenti, quindi è crescente (nella zona in questione). Quindi posso studiare a_n con i metodi di monotonia.

Analogamente: $b_n = x_{2n+1}$ risolve $b_{n+1} = f(f(b_n))$, cioè la stessa.

Nell'esempio: $f(f(x)) = x^4$, quindi sto studiando

$a_{n+1} = a_n^4 \qquad a_0 = \frac{1}{2} \quad ; \qquad b_{n+1} = b_n^4 \qquad b_0 = 4$



È evidente e facile da dimostrare che

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to 0 \text{ decrescendo} \\ b_n \to +\infty \text{ crescendo} \end{array}\right\} \text{piani classici con monotonia}$$

Morale: con l'iterazione doppia (considerare $f(f(x))$) il caso con $f(x)$ decrescente ricade nel caso con $f(f(x))$ crescente.

—o—o—

Teorema generale Sia f di classe C^1 (continua con derivata cont.)
Sia $\ell \in \mathbb{R}$ tale che

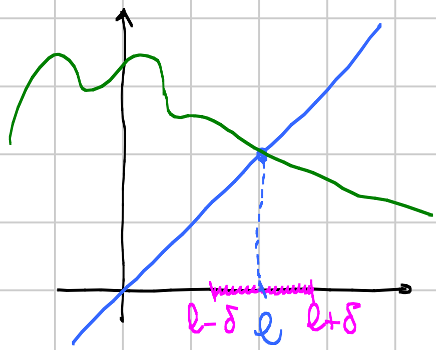
- $f(\ell) = \ell$
- $|f'(\ell)| < 1$.

Considero la succ. per ricorrenza $x_{n+1} = f(x_n)$ $\quad x_0 = \alpha$.
Allora, se α è abbastanza vicino ad ℓ, si ha che $x_n \to \ell$.

Dim. Per continuità di $f'(x)$, esiste $\delta > 0$ ed esiste $c < 1$ tale che

$$|f'(x)| \leq c \text{ per ogni } x \in [\ell - \delta, \ell + \delta]$$

Ora se $\alpha \in [\ell - \delta, \ell + \delta]$, uso la distanza



$$d_{n+1} \underset{\uparrow \text{Def.}}{=} |x_{n+1} - \ell| \underset{\uparrow \text{Ric.} + f(\ell)=\ell}{=} |f(x_n) - f(\ell)| \underset{\uparrow \text{Lagrange}}{=} |x_n - \ell| \cdot |f'(\xi)|$$

Ora ξ sta tra x_n ed ℓ, quindi comunque in $[\ell-\delta, \ell+\delta]$, quindi $|f'(\xi)| \le c$ e quindi $d_{n+1} \le c\, d_n$ con $c<1$ fisso.

Da qui la conclusione è immediata.

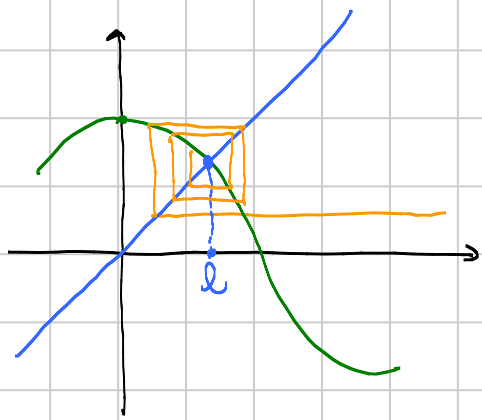
Piano : (i) $\ell - \delta \le x_n \le \ell + \delta$ $\forall n \in \mathbb{N}$ } in un certo senso
(ii) $d_{n+1} \le c\, d_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ } si fanno insieme
(iii) $d_n \le c^n \cdot d_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$
(iv) $d_n \to 0$, cioè $a_n \to \ell$.

— o — o —

<u>Conseguenza</u> : in questi casi è possibile avere una stima della distanza dal limite (data dal p.to (iii)).

<u>Esempio 2</u> Studiare $x_{n+1} = \cos x_n$ $x_0 = 2011$

(Equivalente a scrivere 2011 su una calcolatrice e continuare a premere il tasto "cos": dopo un po' il valore si stabilizza)



<u>1° fatto</u>: l'equazione $x = \cos x$ ha un'unica soluzione reale ℓ.
Si dimostra verificando che $g(x) = x - \cos x$ è surgettiva e strett. crescente, quindi iniettiva.

<u>2° fatto</u>: $x_n \to \ell$. Vorrei fare il piano con la distanza

(i) ...

(ii) $d_{n+1} \le c \cdot d_n$

(iii) $d_n \le c^n d_0$

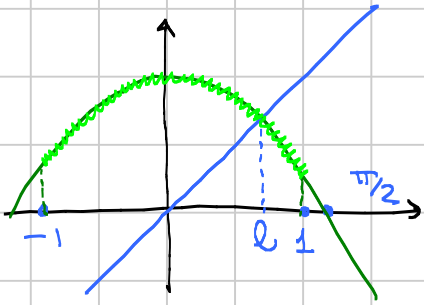
(iv) $d_n \to 0$

Quando provo a dim. la (ii) ho che

$$d_{n+1} = |x_{n+1} - \ell| = |\cos x_n - \cos \ell| \underset{\uparrow \text{Lagrange}}{=} |x_n - \ell| \cdot \underbrace{|\sin \xi|}_{f'(\xi)} \le |x_n - \ell|.$$

Così ho che $d_{n+1} \le d_n$, e questa non serve a nulla.

Idea: fare un p.to (i) in modo da dire che x_n sta in una zona più ristretta vicino ad ℓ in cui la derivata di $\cos x$ sta staccata da ± 1.



Piano

(i) $-1 \leq x_n \leq 1 \quad \forall n \geq 1$ ovvia

(ii) $d_{n+1} \leq c\, d_n \quad \forall n \geq 1$

(iii) solito ovvia

(iv) solito. ovvia

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ $d_{n+1} \leq d_n \cdot |\sin \xi|$ ora ξ sta in $[-1,1]$, quindi $|\sin \xi| \leq \max\{|\sin x| : x \in [-1,1]\} = \sin 1$

Quindi $d_{n+1} \leq \underbrace{\sin 1}_{c<1} \cdot d_n$

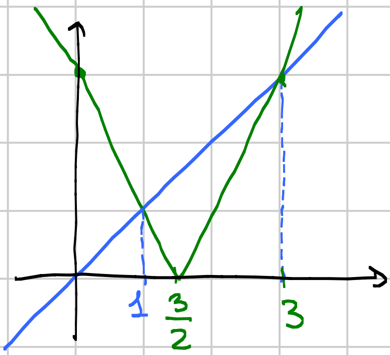
— o — o —

Così ho dim. che $d_n \to 0$ e ho una stima sulla velocità di conv.

— o — o —

Esempio 3 $x_{n+1} = |2x_n - 3|$

$x_0 = \sqrt{2}$



Fatti che si verificano

1. $0 \leq x_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2. Se $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$, allora $\ell = 1$ oppure $\ell = 3$
3. Se fosse $\ell = 1$, allora definitivamente avrei che $0 \leq x_n \leq \frac{3}{2}$, e quindi avrei che $|x_{n+1} - 1| = 2\,|x_n - 1|$ il che impedisce di tendere a 1...
4. Se fosse $\ell = 3$, allora definitiv. ..., quindi $|x_{n+1} - 3| = 2\,|x_n - 3|$
5. Non può tendere a 1 e non può tendere a 3 a meno che non valga $x_n = 1$ oppure $x_n = 3$ per un qualche $n \in \mathbb{N}$.
6. x_n è sempre del tipo $a + b\sqrt{2}$ con $b \neq 0$ e $a, b \in \mathbb{Z}$. Questo gli impedisce di valere 1 o 3.
7. Conclusione: x_n non ha limite.

— o — o —