

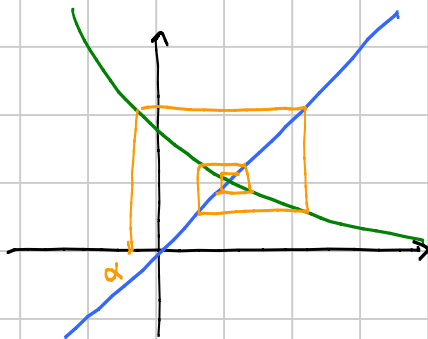
Succ. per ricorrenza autonoma

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

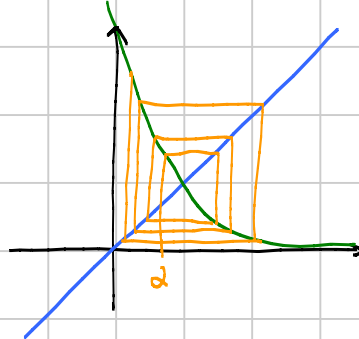
 $a_0 = \alpha$ dato

Se $f(x)$ è crescente, allora la successione a_n risulta monotona, crescente o decrescente (questo dipende dall'essere in una zona con $f(x) > x$ o $f(x) < x$).

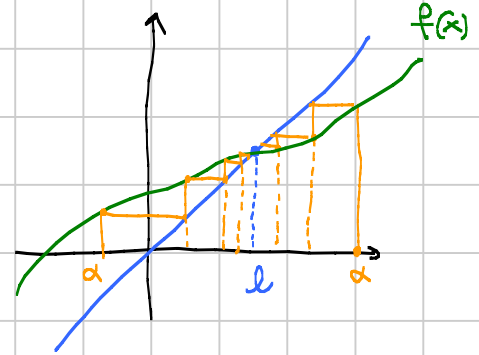
Se $f(x)$ è decrescente, le cose si complicano perché si ha spiraleggiamento di a_n



spiraleggiamento
"entrante"



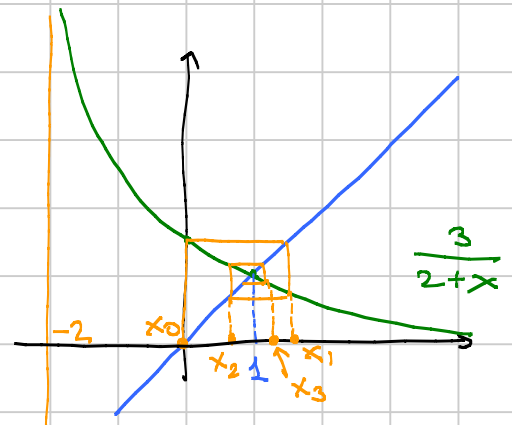
Spiraleggiamento
"uscente"



Esempio 1 $x_{n+1} = \frac{3}{2+x_n}$ $x_0 = 0$

Idea: spiraleggiamento "entrante"

2 tipi di piani: $\rightarrow$ distanza dal limite
 $\rightarrow$ s.succ. pari/dispari



PIANO CON DISTANZA

Idea: porre $d_n = |x_n - 1|$ e dim. che $d_n \rightarrow 0$

(i) $0 \leq x_n \leq \frac{3}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(zona in cui sta la successione)

(ii) $d_{n+1} \leq c d_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(dove $c < 1$ è fisso indep. da n)

(iii) $d_n \leq c^n d_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(segue per induzione dal p.to (ii))

(iv) $d_n \rightarrow 0$

(segue per i carabinieri dal p.to (iii))

Dim. (i) 1° modo Induzione + disuguaglianze

$n=0$ Banale

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $0 \leq x_n \leq \frac{3}{2}$ Tesi: $0 \leq x_{n+1} \leq \frac{3}{2}$

Devo risolvere $x_{n+1} \geq 0$, cioè $\frac{3}{2+x_n} \geq 0$, cioè $x_n > -2$, che è vero per ipotesi

Devo risolvere $x_{n+1} \leq \frac{3}{2}$, cioè $\frac{3}{2+x_n} \leq \frac{3}{2}$, cioè $\frac{1}{2+x_n} - \frac{1}{2} \leq 0$
cioè $\frac{2-2-x_n}{(2+x_n)2} \leq 0$, cioè $\frac{x_n}{x_n+2} \geq 0$ cioè valori esterni:

$x_n < -2$ oppure $x_n \geq 0$ e questa (la seconda) è vera per ipotesi induttiva.

2° modo Induzione + "applico f"

$n=0$ Banale

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $0 \leq x_n \leq \frac{3}{2}$. Applico $f(x)$ all'ipotesi. Essendo in un tratto in cui $f(x)$ è decrescente inverti i versi:

$$f(0) \geq f(x_n) \geq f\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{3}{2} \geq x_{n+1} \geq \frac{3}{2+\frac{3}{2}} = \frac{6}{7} \geq 0$$

che è proprio la tesi del passaggio induttivo.

Dim. (ii) 1° modo Direttamente:

$$\begin{aligned} d_{n+1} &\stackrel{\text{Def.}}{=} |x_{n+1} - 1| \stackrel{\text{Ric.}}{=} \left| \frac{3}{2+x_n} - 1 \right| \stackrel{\text{conto}}{=} \left| \frac{3-2-x_n}{2+x_n} \right| \stackrel{\text{conto}}{=} \\ &= \frac{|1-x_n|}{|2+x_n|} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{d_n}{x_{n+2}} \leq \frac{1}{2} d_n \quad \text{uso che } x_n \geq 0 \quad c = \frac{1}{2} < 1 \text{ OK} \end{aligned}$$

2° modo Stessa cosa con Lagrange:

$$d_{n+1} \stackrel{\text{Def.}}{=} |x_{n+1} - 1| \stackrel{\text{Ric.}}{=} |f(x_n) - f(1)| \stackrel{\text{Lagrange}}{=} |x_n - 1| \cdot |f'(\xi)| = d_n \cdot |f'(\xi)|$$

$$|f'(\xi)| \leq \sup \left\{ |f'(x)| : 0 \leq x \leq \frac{3}{2} \right\} = \sup \left\{ \left| -\frac{3}{(2+x)^2} \right| : 0 \leq x \leq \frac{3}{2} \right\} = \frac{3}{4} < 1$$

— 0 — 0 —

PIANO CON LE 2 SOTTOSUCCESSIONI

Idea: x_{2n} crescente e $\rightarrow 1$

x_{2n+1} decrescente e $\rightarrow +1$

$$(i) \quad 0 \leq x_{2n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(2 zone di competenza)

$$1 \leq x_{2n+1} \leq \frac{3}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(ii) \quad x_{2n} \leq x_{2n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(2 monotonie)

$$x_{2n+1} \geq x_{2n+3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(iii) \quad x_{2n} \rightarrow l \in \mathbb{R}$$

(Esistenza dei 2 limiti)

$$x_{2n+1} \rightarrow m \in \mathbb{R}$$

$$(iv) \quad l = m = 1.$$

(Conclusione)

Dim (iii) Segue banalmente da (i), (ii) e teo. succ. monotone

Dim. (iv) Non posso passare al limite in $x_{n+1} = \frac{3}{2+x_n}$. Sisto allora

$$\begin{array}{c} x_{2n+1} = \frac{3}{2+x_{2n}} \\ \downarrow \\ m = \frac{3}{2+l} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x_{2n} = \frac{3}{2+x_{2n-1}} \\ \downarrow \\ l = \frac{3}{2+m} \end{array}$$

Ho così il sistema

$$\begin{cases} m = \frac{3}{2+l} & 2m + ml = 3 \\ l = \frac{3}{2+m} & 2l + ml = 3 \end{cases}$$

Sottraendo trovo $m=l$. Sostituisco in una qualunque e ottengo $2l + l^2 = 3 \Rightarrow l=1$ oppure $l=-3$. Però $l=3$ è incompatibile.

— o — o —

Oss. lemma delle 2 sottosuccessioni (esercizio) Se $a_{2n} \rightarrow l$ e $a_{2n+1} \rightarrow l$, allora $a_n \rightarrow l$.

Lemma delle k sottosuccessioni Considero una succ. an. Suppongo che esistano k sottosuccessioni tali che

- hanno tutte lo stesso limite $l \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$
- la loro unione copre tutta la succ. an tranne un num. finito di termini

Allora $a_n \rightarrow l$ (stesso l).

Domanda: e se le sottosuccessioni sono infinite?
— 0 — 0 —

Dim (i) Modo + comodo: inclusione + applico f sul blocco delle 2 proprietà.

$n=0$ $0 \leq a_0 \leq 1$ e $1 \leq a_1 \leq \frac{3}{2}$ Banale sostituzione

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $0 \leq a_n \leq 1$ e $1 \leq a_{n+1} \leq \frac{3}{2}$ (2 ipotesi)

Tesi: $0 \leq a_{n+2} \leq 1$ e $1 \leq a_{n+3} \leq \frac{3}{2}$ (2 tesi)

Dim. prendo la seconda ipotesi e applico $f(x)$ che è decrescente

$$1 \leq a_{n+1} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow f(1) \geq f(a_{n+1}) \geq f\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow 1 \geq a_{n+2} \geq \frac{6}{7} \geq 0$$

che è la 1ª tesi. Ora applico $f(x)$ alla 1ª tesi:

$$0 \leq a_{n+2} \leq 1 \Rightarrow f(0) \geq f(a_{n+2}) \geq f(1) \Rightarrow \frac{3}{2} \geq a_{n+3} \geq 1$$

che è la 2ª tesi.

Dim (ii) Inclusione + applico $f(x)$ sul blocco delle 2.

$n=0$ Verificare che $x_0 \leq x_2$ e $x_1 \geq x_3$ (si fa a mano)

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $x_{2n} \leq x_{2n+2}$ e $x_{2n+1} \geq x_{2n+3}$ 2 ipotesi

Tesi: $x_{2n+2} \leq x_{2n+4}$ e $x_{2n+3} \geq x_{2n+5}$ 2 tesi

Dim. prendo la 2ª ipotesi e applico $f(x)$: uso che $f(x)$ è decrescente nella zona in questione.

$$x_{2n+1} \geq x_{2n+3} \Rightarrow \underset{x_{2n+2} \leq x_{2n+4}}{f(x_{2n+1})} \leq \underset{\text{che è la 1ª tesi}}{f(x_{2n+3})}$$

Prendo la 1ª tesi e applico $f(x)$:

$$x_{2n+2} \leq x_{2n+4} \Rightarrow \underset{\text{— 0 — 0 —}}{f(x_{2n+2})} \geq \underset{\text{che è la 2ª tesi}}{f(x_{2n+4})}$$

Oss. finale: $f(x)$ decrescente $\Rightarrow$ ad ogni applicazione si invertano i versi $\Rightarrow$ spiraleggiamento.