SSSUP 2011 — LEZIONE 04

Titolo nota 17/01/2011

Esempio 1 $a_{n+1} = a_n^2 - 3 \qquad a_0 = 0.$

Esperimento: $a_0 = 0$, $a_1 = -3$ Se uno si ferma qui può avere un p.to (i) del tipo $a_n \geq -3 \ \forall n \in \mathbb{N}$, ma questo impedice

- di escludere i limiti reali
- di usare la crescenza di $f(x)$ che vale solo per $x \geq 0$.

Se però uno continua viene $a_2 = 6$, $a_3 = 33$, e quindi sembra chiaro che $a_n \to +\infty$.

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $a_n \geq 6 \quad \forall n \geq 2$

(ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \geq 2$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(iv) $\ell = +\infty$

La dimostrazione dei p.ti del nuovo piano è ora la stessa di prima

Esempio 2 $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \qquad a_0 = 2011$

$\boxed{\text{PIANO}}$ (Piano con la distanza dal presunto limite)

Idea generale: pongo $d_n = |a_n - 2|$

distanza fra a_n ed il presunto limite

Ora $a_n \to 2 \iff d_n \to 0$.

(i) $a_n \geq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (zona a cui appartiene la successione)

(ii) $d_{n+1} \leq c\, d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (dovrò precisare chi è c e deve essere $c < 1$)

(iii) $d_n \leq c^n d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iv) $d_n \to 0$, cioè $a_n \to 2$.

I p.ti (i), (iii), (iv) sono banali.

Dim (i): come nel piano con la monotonia

Dim (iii): banale induzione a partire dal p.to (ii)

Dim. (iv): sappiamo che

$$\boxed{0} \leq \underbrace{d_n}_{\text{distanza}} \leq \boxed{c^n d_0} \quad (\text{p.to (iii)})$$

Quindi per i carabinieri ho che $d_n \to 0$

$0 \to 0$, $d_n \to 0$, $c^n d_0 \to 0$ (essenziale che $c<1$)

$\boxed{\text{Punto (ii)}}$ Bisogna dim. che esiste una costante $c<1$ tale che
$$d_{n+1} \leq c\, d_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

[<u>Oss.</u> NON basta dimostrare che $d_{n+1} < d_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$: la costante c deve essere <1 e deve essere la stessa per ogni $n \in \mathbb{N}$]

$$d_{n+1} \underset{\text{def.}}{=} |a_{n+1}-2| \underset{\text{ricorr.}}{=} |\sqrt{a_n+2}-2| \qquad \text{(Razionalizzo)}$$

$$= \left| (\sqrt{a_n+2}-2) \cdot \frac{\sqrt{a_n+2}+2}{\sqrt{a_n+2}+2} \right|$$

$$= \left| \frac{a_n+2-4}{\sqrt{a_n+2}+2} \right| \qquad \boxed{\text{stimo il denom.} \geq 2}$$

$$= \frac{|a_n-2|}{\sqrt{a_n+2}+2} = \frac{d_n}{\sqrt{a_n+2}+2} \leq \frac{d_n}{2}$$

Così ho ottenuto che $d_{n+1} \leq \frac{1}{2} d_n$, quindi ho la (ii) con $c=\frac{1}{2}$, come volevo.

— o — o —

<u>Commenti sul p.to (ii)</u>. $d_n = |a_n - \ell|$, dove ℓ è una soluzione dell'equazione $f(\ell)=\ell$.

<u>Teorema di Lagrange</u> Se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ che è
- continua in $[a,b]$,
- derivabile in (a,b),

allora $\exists\, \xi \in (a,b)$ tale che $f(b)-f(a) = (b-a) f'(\xi)$

Nel nostro caso:
$$d_{n+1} = |a_{n+1}-\ell| = |f(a_n)-f(\ell)| = |a_n-\ell| \cdot |f'(\xi)| = d_n \cdot |f'(\xi)|$$

Ho ottenuto che $d_{n+1} = d_n \cdot \text{coeff.}$ Devo sperare che il coeff. sia minore di 1. Ovviamente su ξ so solo che sta tra a_n ed ℓ, e qui torna utile il p.to (i).

Nell' esempio ho che $\ell = 2$ e $a_n \geq 2$ per il p.to (i).
Quindi posso dire che $\xi \geq 2$ e quindi

$$|f'(\xi)| \leq \sup\{|f'(x)| : x \geq 2\}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$, quindi $\sup\{|f'(x)| : x \geq 2\} =$

$$= \max\{|f'(x)| : x \geq 2\} = \frac{1}{4}$$

$f'(x)$ è massima quando il denom. è minimo.

In questo modo ottengo $d_{n+1} \leq \frac{1}{4} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e va benissimo.

— o — o —

Esempio 3 $\quad a_{n+1} = a_n^2 - 3 \qquad a_0 = 6$

$\boxed{\text{PIANO}}$ Pongo $d_n = a_n - \ell$ (senza valore assoluto), dove ℓ è la radice + grande dell' equazione $f(\ell) = \ell$

(i) $a_n \geq \ell \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $d_{n+1} \geq c\, d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (e mi serve che sia $c > 1$)

(iii) $d_n \geq c^n d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iv) $d_n \to +\infty$, cioè $a_n \to +\infty$.

I p.ti (i), (iii), (iv) funzionano come sempre

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ 1º modo: "elementare"

$d_{n+1} = a_{n+1} - \ell = a_n^2 - 3 - \ell$ e da qui non è ovvio come tirare fuori d_n

Con un pò di mestiere uso che $\ell^2 - 3 = \ell$, quindi

$$d_{n+1} = a_n^2 - 3 - \ell = a_n^2 - \cancel{3} - \ell^2 + \cancel{3} = (a_n + \ell)(a_n - \ell)$$

$$= \underbrace{(a_n + \ell)}_{\geq 2} \underbrace{d_n}_{\geq 0} \geq 2 d_n$$

Ho ottenuto che $d_{n+1} \geq 2 d_n$ e va benissimo.

2º modo: "Lagrange": $d_{n+1} = a_{n+1} - \ell = f(a_n) - f(\ell)$

$$= (a_n - \ell) \cdot f'(\xi)$$

$$= d_n \cdot f'(\xi)$$

Dove sta ξ? Per il p.to (i) so che $\xi \geq \ell$, quindi

$$f'(\xi) \geq \inf\{f'(x) : x \geq \ell\} = \inf\{2x : x \geq \ell\}$$
$$= \min\{2x : x \geq \ell\} = 2\ell \geq 4$$

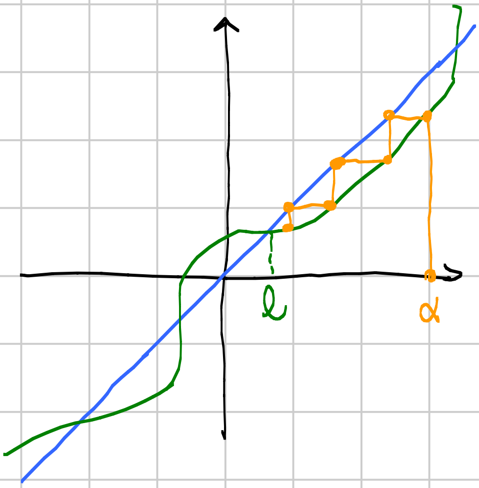
Ho così ottenuto che $\underset{\circ}{\underline{d_{n+1}}} \geq \underset{\circ}{\underline{4 d_n}}$, $\underline{\text{il che}}$ basta e avanza.

<u>Esempio di teorema</u> (esercizio) $a_{n+1} = f(a_n)$ $\quad a_0 = \alpha$

Supponiamo che

- $f(x)$ è continua
- $f(x)$ è debolmente crescente su tutto $\mathbb{R}$
- $f(\alpha) < \alpha$

Allora a_n è debolmente decrescente e tende alla più grande soluzione dell' eq $x = f(x)$ che sia minore di α. Se non esistono tali soluzioni, allora $a_n \to -\infty$



<u>Piano della dim.</u> Supponiamo che ℓ sia la soluzione più grande

(i) $\ell \leq a_n \leq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (induzione)

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (induzione + applico f)

(iii) $a_n \to m \in \mathbb{R}$ (solito)

(iv) $m = \ell$ (solito)

<u>Esercizio</u>

- Dimostrare il teorema in questo caso
- " " " se non esiste la soluzione più piccola di α
- Enunciare e dim. un teorema analogo nel caso $f(\alpha) > \alpha$.