Successioni per ricorrenza non lineari (autonome, 1° ordine)

$$a_{n+1} = f(a_n) \qquad a_0 = \alpha \text{ dato}$$

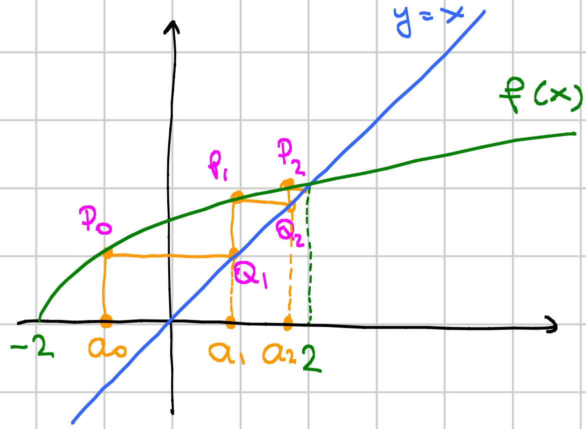
Impossibile (in generale) avere una formula esplicita

Interpretazione grafica $\quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \quad a_0 = -1$

$f(x) = \sqrt{x+2}$

Per fare il disegno occorre studiare

$f(x) = x$, $f(x) > x$, $f(x) < x$




Slogan: verticale alla funzione
orizzontale alla bisettrice

(la procedura produce 1 p.to ad ogni passaggio)

$P_0 = (a_0, f(a_0)) = (a_0, a_1)$ ; $Q_1 = (a_1, a_1)$ ; $P_1 = (a_1, f(a_1)) = (a_1, a_2)$

$P_i = (a_i, a_{i+1})$ ; $Q_i = (a_i, a_i)$

I valori $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ sono le ascisse dei punti ottenuti seguendo lo slogan.

Nell'esempio è chiaro che $a_n$ è strett. crescente e $a_n \to 2$. Per dimostrarlo bisogna elaborare un piano.

$\boxed{\text{PIANO}}$ (Piano classico con la monotonia)

(i) $-1 \le a_n \le 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (limitazione della zona in cui sta $a_n$)

(ii) $a_{n+1} \ge a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (monotonia debole)

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ (esistenza del limite)

(iv) $\ell = 2$ (calcolo del limite)

Idea: dimostrare in successione i vari p.ti usando anche i p.ti prec.

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ Induzione $n=0$ banale

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Ipotesi: $-1 \le a_n \le 2$ Tesi: $-1 \le a_{n+1} \le 2$

Dim.: prendo l'ipotesi e "applico la funzione" $f(x)$

$$\begin{array}{ccccc} f(-1) & \le & f(a_n) & \le & f(2) \\ & & \shortparallel & & \shortparallel \\ -1 \le 1 & \le & a_{n+1} & \le & 2 \end{array}$$

(osservazione essenziale: posso lasciare invariati i versi perché $f(x)$ è strett. crescente per $x \ge -2$)

il che dim. la tesi.

$\boxed{\text{Dim. (ii)}}$ 1° modo: $\boxed{\text{ricorrenza + disequazione}}$

Devo dim. che $a_{n+1} \ge a_n$, cioè $\sqrt{a_n+2} \ge a_n$, cioè devo risolvere la disequazione $\sqrt{x+2} \ge x$ (che è $f(x) \ge x$).

Questa ha come soluzione $-2 \le a_n \le 2$, e noi sappiamo che questa è verificata grazie al p.to (i).

2° modo: $\boxed{\text{induzione + applico } f}$

$\boxed{n=0}$ $a_1 \overset{?}{\ge} a_0$ $1 \ge -1$ ok.

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Ipotesi: $a_{n+1} \ge a_n$ Tesi: $a_{n+2} \ge a_{n+1}$

Dim.: applico $f(x)$ all'ipotesi e ottengo $f(a_{n+1}) \ge f(a_n)$

(conservo i versi perché ...)

$$\begin{array}{ccc} f(a_{n+1}) & \ge & f(a_n) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ a_{n+2} & \ge & a_{n+1} \end{array}$$

$\boxed{\text{Dim. (iii)}}$ Teo succ. monotone: $a_n$ è

- monotona crescente per il p.to (ii)
- limitata superiormente per il p.to (i)

Quindi esiste il limite ed è reale.

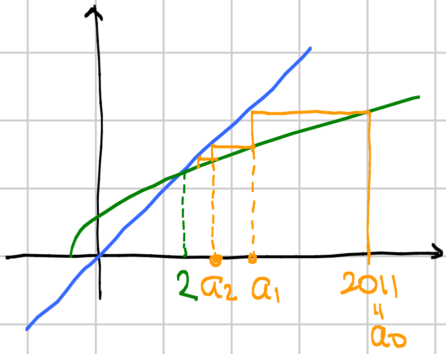
$\boxed{\text{Dim. (iv)}}$ Passo al limite nella ricorrenza (usando che $l$ esiste e $\in \mathbb{R}$)

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & \sqrt{a_n+2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ l & = & \sqrt{l+2} \end{array}$$

Ottengo così un'equazione in $l$ (che è $x = f(x)$) la cui soluzione (unica in questo caso) è $l = 2$. $\square$

— o — o —

**Esempio 2** $\quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \qquad a_0 = 2011$




$\boxed{\text{Piano}}$ (i) $a_n \geq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$

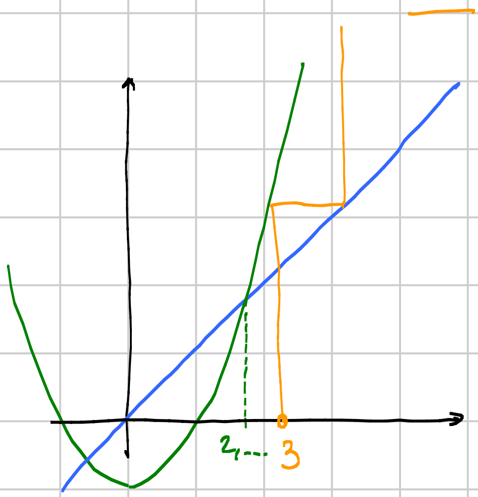
(iv) $\ell = 2$

Dim. esattamente come prima.

**Oss.** La funzione $f(x)$ è monotona crescente, MA la successione $a_n$ è monotona DEcrescente.

— o — o —

**Esempio 3** $\quad a_{n+1} = a_n^2 - 3 \qquad a_0 = 3$




$f(x) = x \iff x^2 - 3 = x \iff x^2 - x - 3 = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

Dal disegno sembra che $a_n \to +\infty$.

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $a_n \geq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(iv) $\ell = +\infty$

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ Induzione ...

$\boxed{\text{Dim. (ii)}}$ 1° modo: ricorrenza + disequazione:

$a_{n+1} \geq a_n$, cioè $a_n^2 - 3 \geq a_n$, cioè $a_n^2 - a_n - 3 \geq 0$, cioè valori esterni all'intervallo delle radici. Dal p.to (i) sappiamo che $a_n \geq 3 \geq$ radice + grande, quindi ok.

2° modo: induzione + applico $f(x)$

$\boxed{n=0}$ $\quad a_1 \overset{?}{\geq} a_0 \qquad 6 \geq 3 \qquad$ ok.

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Ipotesi: $a_{n+1} \geq a_n$ ... applico $f(x)$ e conservo i versi perché è crescente per $x \geq 0$ ed io sto lavorando nella zona $a_n \geq 3$ grazie al p.to (i). Ottengo

$$\underbrace{f(a_{n+1})}_{a_{n+2}} \geq \underbrace{f(a_n)}_{a_{n+1}}$$

e questa è la tesi del passaggio induttivo.

$\boxed{\text{Dim. (iii)}}$ Per il p.to (ii) $a_n$ è debolm. crescente. Allora $a_n$ ha limite, finito o $+\infty$, per il teo. sulle succ. monotone.

$\boxed{\text{Dim. (iv)}}$ Suppongo per assurdo che sia $\ell \in \mathbb{R}$. Allora posso passare al limite nella ricorrenza e ottengo

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & a_n^2 - 3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell & = & \ell^2 - 3 \end{array}$$

Ottengo la solita equazione $f(x) = x$, che ha come soluzioni $\ell = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$, ma entrambe sono incompatibili con il p.to (i).

Essendo assurdo che sia $\ell \in \mathbb{R}$, resta come unica possibilità $\ell = +\infty$.

— o — o —

<u>Osservazioni generali</u> $\quad a_{n+1} = f(a_n)$

① Se $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$, allora $\ell$ è una delle soluzioni dell'equazione $x = f(x)$. Le intersezioni tra il grafico di $f(x)$ e la bisettrice sono i possibili limiti reali.

② Dove $f(x) \geq x$ si ha $a_{n+1} = f(a_n) \geq a_n$

" $\quad f(x) \leq x$ si ha $a_{n+1} = f(a_n) \leq a_n$

Quindi il tipo di monotonia di $a_n$ dipende dallo stare $f(x)$ sopra o sotto la bisettrice nella zona di interesse, cioè quella individuata al p.to (i).

— o — o —