SSSUP 2011 — LEZIONE 02

Nei casi $x_{n+1} = a x_n + f(n)$

Se $f(n)$ è un polinomio in n di grado d, allora è ragionevole trovare una successione y_n che la verifica sotto forma di polinomio dello stesso grado a coeff. incogniti.

Una volta trovata y_n, si trova facilmente la soluzione gen. x_n.

La formula della sol. gen. ha al suo interno un parametro libero z_0 che permette di assumere ogni condizione iniziale.

<u>Esempio 1</u> $x_{n+1} = x_n + n^2 + 3$.

Idea iniziale: provare con un polinomio di grado 2:

$y_n = an^2 + bn + c$.

$$\underbrace{a(n+1)^2 + b(n+1) + c}_{y_{n+1}} = \underbrace{an^2 + bn + c}_{y_n} + n^2 + 3$$

$$\cancel{an^2} + 2an + a + bn + b + \cancel{c} = \cancel{an^2} + bn + \cancel{c} + n^2 + 3$$

Problema: spariscono i termini in n^2. Il problema nasce dal coeff. 1 in fronte a x_n.

Tentativo da fare: passare al grado successivo, tralasciando il termine noto che tanto sparisce per lo stesso motivo di prima.

Tentativo: $y_n = an^3 + bn^2 + cn$ e con qualche calcolo si finisce.

<u>Esempio 2</u> $x_{n+1} = 2x_n + 5^n$

Cerco una soluzione speciale del tipo $y_n = a\,5^n$. Sostituisco:

$$a\,5^{n+1} = 2a5^n + 5^n$$

$$5a \cdot 5^n = (2a+1)5^n \Rightarrow 5a = 2a+1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

Una soluzione speciale è $y_n = \frac{1}{3} \cdot 5^n$

Ponendo $z_n = x_n - y_n$ ottengo $z_{n+1} = 2 \cdot z_n$, quindi

parametro libero

$$x_n = z_n + y_n = z_0 \cdot 2^n + \frac{1}{3} 5^n$$

Esempio 3 $\quad x_{n+1} = 5x_n + 5^n$

Se provo $y_n = a \cdot 5^n \Rightarrow a \cdot \cancel{5^{n+1}} = 5 \cdot \cancel{a \cdot 5^n} + 5^n$

Soluzione: mettere una n davanti!

$y_n = a n 5^n \Rightarrow a(n+1)5^{n+1} = 5an5^n + 5^n$

$$\cancel{an5^{n+1}} + a5^{n+1} = \cancel{5an5^n} + 5^n$$

stessa cancellazione di prima moltiplicata per n

Ora $a = \frac{1}{5}$ e si fa...

— o — o — o —

$\boxed{\text{ORDINE } 2}$ $\quad x_{n+1} = a x_n + b x_{n-1}$ (caso omogeneo)

Proviamo a vedere se ci sono soluzioni di tipo esponenziale.

Provo $x_n = R^n$. Sostituisco:

$$R^{n+1} = aR^n + bR^{n-1} \Rightarrow R^2 = aR + b$$

Devo prendere come R una delle soluzioni dell'eq. di 2° grado

$\boxed{\Delta > 0}$ Ho trovato 2 soluzioni che vanno bene

$\boxed{\Delta < 0}$ Ho trovato 2 soluzioni complesse che vanno bene

$\boxed{\Delta = 0}$ Ho trovato una soluzione che va bene. Un'altra si ottiene mettendo una n davanti. Perché? $x_n = nR^n$

$$(n+1)R^{n+1} = anR^n + b(n-1)R^{n-1}$$

$$nR^2 + R^2 = anR + bn - b$$

$$n\underbrace{(R^2 - aR - b)}_{=0} = \underbrace{\boxed{-R^2 - b}}_{=0}$$

=0 perché R è soluzione dell'equazione $R^2 = aR + b$

essendo R una radice doppia del polinomio abbiamo che $-b$ = termine noto = = prodotto radici = R^2

Utilizzo ulteriore della linearità. Date x_n e y_n 2 soluzioni di una ricorrenza lineare omogenea, allora la successione

$$z_n = \alpha x_n + \beta y_n \quad \text{(combinazione lineare ...)}$$

cosa risolve?

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \alpha x_{n+1} + \beta y_{n+1} \\ &= \alpha (a x_n + b x_{n-1}) + \beta (a y_n + b y_{n-1}) \\ &= a(\alpha x_n + \beta y_n) + b(\alpha x_{n-1} + \beta y_{n-1}) \\ &= a z_n + b z_{n-1} \end{aligned}$$

Nel caso LINEARE OMOGENEO ogni combinazione lineare di soluzioni è ancora soluzione!!!
Una volta note 2 soluzioni, ho trovato una famiglia a 2 parametri di soluzioni. Se x_n e y_n le so, ho che

$$z_n = \alpha x_n + \beta y_n$$

è soluzione. Sono tutte? Sì, perché ogni soluzione è univocamente determinata sapendo z_0 e z_1 e con 2 parametri a disposizione posso "fittare" i 2 valori.

Oss. le 2 soluzioni di base devono essere non l'una multipla dell'altra, cioè linearmente indipendenti.

Nei 3 casi $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$ abbiamo trovato 2 soluzioni linearmente indipendenti. La sol. generale è una loro comb. lin.

Esempio Fibonacci: $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$.
Per trovare 2 sol. considero l'eq. $R^2 = R + 1$, quindi

$R^2 - R - 1 = 0$ $\quad R_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. La soluzione generale è

$$x_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Dati i valori iniziali (che per Fibonacci sono $x_0 = 0$, $x_1 = 1$) si determinano univocamente α e β

Oss. 1 I numeri di Fibonacci sono interi, ma la formula è piena di $\sqrt{5}$, che evidentemente si semplificano

Oss. 2 Calcolare $\lim_{x \to +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \dots = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

—o—o—

Nel caso in cui le 2 radici sono complesse, ma i dati iniziali sono reali, si ottiene una formula dove le i alla fine si semplificano come le $\sqrt{5}$ in Fibonacci.

—o—o—

Se è non omogenea, tipo $x_{n+1} = 2x_n + 3x_{n-1} + n$, la soluzione generale sarà del tipo

$$x_n = z_n + y_n$$

soluzione generale (con 2 parametri) della ricorrenza omogenea associata.

soluzione qualunque trovata per tentativi

—o—o—

Se la ricorrenza è di ordine k, il polinomio associato è di ordine k, quindi ha k radici che producono i k elementi della base le cui combinazioni lineari danno la soluzione generale. Se c'è una radice R di molteplicità m, questa produce m elementi della base della forma

$$R^n, \quad n \cdot R^n, \quad n^2 R^n, \quad \dots, \quad n^{m-1} R^n.$$