SSSUP 2011 - LEZIONE 01

Titolo nota 13/01/2011

Successioni per ricorrenza

1° ordine, autonome: dipendenza dal solo termine precedente

$$a_{n+1} = f(a_n) \qquad a_0 = \alpha$$

legge di passaggio — valore iniziale dato

2° ordine, autonome: dipendenza da 2 termini precedenti

$$a_{n+1} = f(a_n, a_{n-1}) \qquad a_0 = \alpha \quad a_1 = \beta$$

dati

Ordine k: $a_{n+1} = f(a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-k+1})$ + k valori iniziali dati

Non autonome: la legge di passaggio dipende anche da n

$a_{n+1} = f(n, a_n)$ 1° ordine $\qquad a_{n+1} = \cos(n\, a_n)$

$a_{n+1} = f(n, a_n, a_{n-1})$ 2° ordine

colpevole del non essere autonoma.

e così via

Domande a cui rispondere: proprietà (monotonia, limitatezza, ...), calcolo del limite (se esiste)

Utilizzo operativo: per un computer è banale iterare una ricorrenza.

Quello che non si riesce quasi mai a fare è trovare una formula esplicita per calcolare un certo a_n senza calcolare prima tutti i precedenti.

Questo riesce nel caso di successioni per ricorrenza LINEARI:

$$\underbrace{\begin{array}{l} x_{n+1} = a x_n \quad \text{1° ordine} \\ x_{n+1} = a x_n + b x_{n-1} \quad \text{2° ordine} \end{array}}_{\text{lineare omogeneo}} \qquad \underbrace{\begin{array}{l} x_{n+1} = a x_n + f(n) \\ x_{n+1} = a x_n + b x_{n-1} + f(n) \end{array}}_{\text{lineare non omogeneo}}$$

Oss. Non omogeneo vuol dire non autonoma? No!
C'è il caso in cui $f(n)$ = costante $\neq 0$ (es.: $x_{n+1} = 3x_n + 4$)

Caso lineare 1° ordine omogeneo

$$x_{n+1} = a x_n \qquad x_0 = \alpha$$

Formula esplicita:

$$\boxed{x_n = \alpha a^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}}$$

Dim.: banale induzione

Caso lineare 1° ordine non omogeneo ma autonomo

$$x_{n+1} = a x_n + b \qquad x_0 = \alpha$$

1° modo: calcolo un po' di termini e cerco di capire

$x_0 = \alpha$, $x_1 = a\alpha + b$, $x_2 = a^2\alpha + ab + b$, $x_3 = a^3\alpha + a^2 b + ab + b$

Congettura: $x_n = a^n \alpha + b(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}) = a^n\alpha + b\dfrac{a^n - 1}{a-1}$
per lo meno se $a \neq 1$.
La dimostrazione è una banale induzione.
Quando $a = 1$ è ancora più semplice: $x_{n+1} = x_n + b$

$$\boxed{x_{n+1} = \begin{cases} a^n\alpha + b\dfrac{a^n - 1}{a-1} & \text{se } a \neq 1 \\[2ex] \alpha + nb & \text{se } a = 1 \end{cases}}$$

2° modo: assumiamo $a \neq 1$. Ignoro il dato iniziale. Esistono successioni costanti che soddisfano la ricorrenza?
Supponiamo $x_n \equiv x$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora

$$x = ax + b \implies x = \frac{b}{1-a}$$

Pongo ora $b_n = x_n - \dfrac{b}{1-a}$

Che cosa risolve b_n?

$$b_{n+1} = x_{n+1} - \frac{b}{1-a} = a x_n + b - \frac{b}{1-a} \qquad \left(x_n = b_n + \frac{b}{1-a}\right)$$

$$= a\left(b_n + \frac{b}{1-a}\right) + b - \frac{b}{1-a}$$

$$= a b_n + \underbrace{\boxed{\frac{ab}{1-a} + b - \frac{b}{1-a}}}_{=0}$$

$$= a b_n$$

Quindi $b_{n+1} = a b_n \Rightarrow b_n = a^n \cdot b_0$

Ho una formula esplicita per b_n, quindi anche una formula esplicita per x_n.

$$x_n = b_n + \frac{b}{1-a} = a^n \cdot b_0 + \frac{b}{1-a} = a^n\left(\alpha - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}$$

Facendo i conti è la formula di prima.

—o—o—

<u>Struttura generale</u> Voglio una formula esplicita per

$$x_{n+1} = a x_n + f(n)$$

Supponiamo di conoscere per qualche motivo una successione y_n che verifica questa ricorrenza, cioè $y_{n+1} = a y_n + f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Come sono fatte tutte le altre soluzioni?

Pongo $z_n = \underset{\text{mist.}}{x_n} - \underset{\text{nota}}{y_n}$. Cosa risolve z_n?

USO PESANTE DELLA LINEARITÀ

$$z_{n+1} = x_{n+1} - y_{n+1} = a x_n + \cancel{f(n)} - a y_n - \cancel{f(n)} = a z_n$$

Il termine non omogeneo è sparito, quindi so calcolare z_n. Nota z_n è nota pure x_n:

$$x_n = z_n + y_n = a^n \cdot \underset{\text{noto}}{z_0} + \underset{\text{noto}}{y_n}$$

Morale: se uno conosce una soluzione qualunque, allora nel caso lineare conosce TUTTE le soluzioni

Analogia con i sistemi lineari: se ho 2 soluzioni di un sistema lin. non omogeneo

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 5 \\ x - y + 3z = 7 \\ x - z = 9 \end{cases}$$

Se (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) sono soluz., allora $(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$ è sol. del sistema con tutti 0 al 2° membro.

—o —o —

<u>Esempio 1</u> $\quad x_{n+1} = 3x_n + n \qquad x_0 = 5$

Provo a trovare una successione che verifichi la ricorrenza (senza dato iniziale). Proviamo a cercarla di tipo polinomiale:

$y_n = an + b$, con a e b coeff. incogniti. Sostituisco:

$$\underbrace{a(n+1) + b}_{y_{n+1}} = \underbrace{3(an+b)}_{3y_n} + n$$

$$an + a + b = 3an + 3b + n; \quad -2an + a - 2b = n$$

$$\begin{cases} -2a = 1 \\ a - 2b = 0 \end{cases} \qquad a = -\frac{1}{2} \qquad b = \frac{a}{2} = -\frac{1}{4}$$

Così ho dimostrato che $y_n = -\frac{1}{2}n - \frac{1}{4}$ è soluzione della ric.

Ma allora $z_n = x_n - y_n$ risolve la stessa ricorrenza senza il termine non omogeneo, cioè $z_{n+1} = 3z_n$, da cui

$$x_n = z_n + y_n = 3^n z_0 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}$$

Al variare di z_0 questa fornisce tutte le soluzioni. Se devo imporre $x_0 = 5$, basta sostituire: $\quad 5 = z_0 - \frac{1}{4} \Rightarrow z_0 = 5 + \frac{1}{4} = \frac{21}{4}$

$$\boxed{x_n = \frac{21}{4} \cdot 3^n - \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}}$$

Questa non si vedeva provando a fare i primi termini...