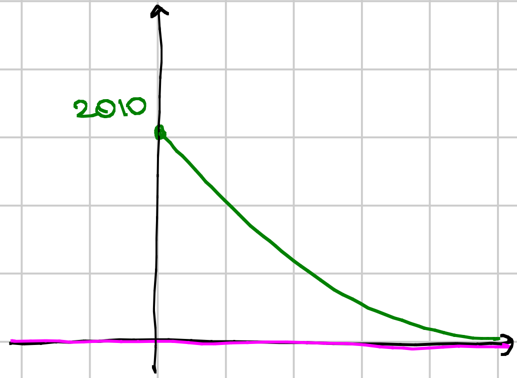
SSSUP 2010 — LEZIONE 26

Titolo nota 29/04/2010

__Esercizio__ $\begin{cases} u' = -\dfrac{e^{2u}-1}{e^{4u}} \\ u(0) = 2010 \end{cases}$

Eq. autonoma: bene!!

$u(t) \equiv 0$ soluzione stazionaria



Esistenza globale gratis perchè è decrescente e non può scendere sotto 0 (questo nel futuro).

È globale anche nel passato perchè

$|f(u)| \leq$ costante per $u \geq 0$. (sugli $u<0$ non ci va)

perchè $f(0)=0$ e $f(u)\to 0$ per $u \to +\infty \Rightarrow f$ è limitata

Per $t \to +\infty$ si ha che $u(t) \to 0$ perchè è l'unico compatibile con teo. asintoto.

Come tende a zero $u(t)$?

__Oss.__ Quando $u \sim 0$ si ha che $-\dfrac{e^{2u}-1}{e^{4u}} \sim -\dfrac{\cancel{1}+2u-\cancel{1}}{1} = -2u$

Quindi è come se fosse $u' \sim -2u$ che ha come soluzioni $u(t) = c\,e^{-2t}$ (si risolve esplicitamente).

—o—o—

__Esercizio__ $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2010} e^{-t}\,dt$

converge perchè c'è e^{-t}

Formalmente: confr. asint. con $\frac{1}{t^2}$.

Per calcolarlo studio in generale

$$\int \underset{G}{t^k}\,\underset{f}{e^{-t}}\,dt = \underset{G}{t^k}\,\underset{F}{(-e^{-t})} - \int \underset{g}{t^{k-1}(k)}\,\underset{F}{(-e^{-t})}\,dt$$

$$= -t^k e^{-t} + k\int t^{k-1} e^{-t}\,dt$$

Quindi $\underbrace{\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt}_{I_k} = \underbrace{-\left[t^k e^{-t}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + k\int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t}\,dt$

$I_k \quad = \quad k\, I_{k-1}$

da cui facilmente $I_k = k!\cdot \underbrace{I_0}_{=1} = k!$

Oss. La funzione $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t}\,dt$

è una funzione definita per ogni $\alpha \geq 0$ reale (anche per $\alpha > -1$) che sugli interi coincide con il fattoriale (cioè $I(\alpha) = \alpha!$ per $\alpha \in \mathbb{N}$)

Esercizio Calcolare $\int_0^{\pi/2} \sin^k x\,dx = S_k$

Facile: $S_0 = \frac{\pi}{2}$, $S_1 = 1$. Successivamente

$$\int \sin^k x\,dx = \int \underset{f}{\sin x}\cdot \underset{G}{\sin^{k-1} x} = -\cos x\cdot \sin^{k-1}x - \int (-\cos x)\cdot(k-1)\sin^{k-2}x\cdot\cos x\,dx$$

$$= -\cos x\cdot\sin^{k-1}x + (k-1)\int \underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x}\cdot\sin^{k-2}x\,dx$$

$$= -\cos x\cdot\sin^{k-1}x + (k-1)\int \sin^{k-2}x\,dx - (k-1)\int \sin^k x\,dx$$

Quindi $k\int \sin^k x\,dx = -\cos x\cdot\sin^{k-1}x + (k-1)\int \sin^{k-2}x\,dx$

Integrando fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ otteniamo

$$k\,S_k = (k-1)\,S_{k-2} \quad \text{quindi} \quad S_k = \frac{k-1}{k}\,S_{k-2}$$

Esempi $S_{2010} = \frac{2009}{2010} S_{2008} = \frac{2009}{2010}\,\frac{2007}{2008}\,S_{2006}$

$$= \ldots = \frac{(2009)!!}{(2010)!!}\,\frac{\pi}{2}$$

Più in generale $S_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\frac{\pi}{2}$; $S_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$

Da queste formule è possibile ottenere valori approssimati di π

$$\frac{S_{2k+1}}{S_{2k}} = \frac{(2k)!!\,(2k)!!}{(2k-1)!!\,(2k+1)!!}\cdot\frac{2}{\pi}$$

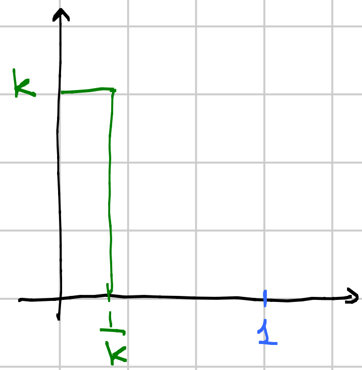
Si tratterebbe ora di capire a cosa tende $\frac{S_{2k+1}}{S_{2k}}$.
Mettiamo che tenda ad 1. Allora
la frazione con i fattoriali $\to \frac{\pi}{2}$ per $k\to+\infty$.

Perchè tende ad 1? Boh !!!

Più semplice: $\lim\limits_{k\to+\infty} S_k = 0$. Brutalmente

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^k x\,dx \underset{\text{Speranza}}{=} \int_0^{\pi/2}\lim_{k\to+\infty}\sin^k x\,dx$$

Cose di questo tipo in generale sono false.



Esempio

$$f_k(x) = \begin{cases} k & \text{se } x\in[0,\frac{1}{k}] \\ 0 & \text{se } x\in[\frac{1}{k},1] \end{cases}$$

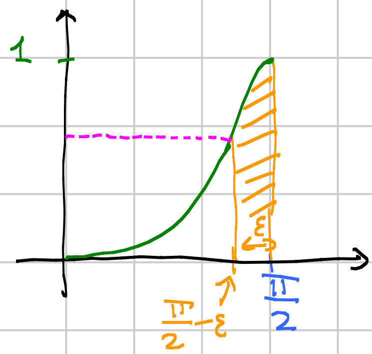
$\lim\limits_{k\to+\infty} f_k(x) = 0$ per ogni $x>0$
(fissato $x>0$ si ha $f_k(x)=0$ definitivamente)

Tuttavia

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^1 f_k(x)\,dx = 1$$

Limite integrali $\neq$ integrale del limite

Perchè funziona nell'esempio?



Fisso $\varepsilon>0$

$$0\le\int_0^{\pi/2}\sin^k x\,dx = \int_0^{\pi/2-\varepsilon}\sin^k x\,dx + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\sin^k x\,dx}_{\text{metto 1 al posto di sin}}$$

$$\le \underset{\substack{\uparrow\\ \text{stima della base}}}{\frac{\pi}{2}}\ \underbrace{\sin^k\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}_{\substack{\uparrow\\ \text{max della funzione nell'intervallo } [0,\frac{\pi}{2}-\varepsilon]}} + \varepsilon$$

Faccio liminf e limsup tenendo fisso ε. Ottengo

$$0 \le \liminf_{k\to+\infty} S_k \le \limsup_{k\to+\infty} S_k \le \lim_{k\to+\infty} \underbrace{\frac{\pi}{2}\sin^k\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}_{\substack{\downarrow \\ 0 \quad a^k \text{ con } a<1}} + \varepsilon$$

Quindi dato $\varepsilon>0$ ho che $\quad 0 \le \liminf \le \limsup \le \varepsilon$

Essendo $\varepsilon>0$ arbitrario, allora è tutto 0.

<u>Teorema</u> Il limite degli integrali è uguale all'integrale del limite se tutte le $f_k(x)$ sono tali che

$$|f_k(x)| \le g(x)$$

dove $g(x)$ è una funzione integrabile fissa (indipendente da k)

<u>Oss.</u> Esiste un teorema simile che dice

"la derivata dell'integrale (dipendente da un param. λ) = integrale della derivata rispetto a λ dell'integranda"

Si tratta solo di vedere la derivata come limite del rapporto incrementale e applicare teo. sui limiti.

AGGIUNTE POST VIDEO

$\boxed{1}$ Perchè $\frac{S_{k+1}}{S_k} \to 1$? Intanto è facile vedere che

$$\frac{S_{k+2}}{S_k} \leq \frac{S_{k+1}}{S_k} \leq 1$$

Il termine di sinistra si calcola esplicitamente e va a 1.
La conclusione è con i Carabinieri

$\boxed{2}$ $u' = u^2 - t^2$ Perchè la sol. globale monotona (con $\alpha > 0$) è unica ?

Siano u e v due sol. di questo tipo, con $v > u$. Allora $w = v - u$ risolve

$$w' = v^2 - u^2 = \underbrace{(v+u)}_{\geq w}\underbrace{(v-u)}_{= w} \geq w^2$$

ma allora w ha blow-up in tempo finito, mentre u e v no!