

SSSUP 2010 - LEZIONE 25

Titolo nota

29/04/2010

Esercizio Dimostrare che $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge

Se fosse $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ basterebbe dire che

$$\frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}. \text{ Allora}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ converge} \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2} dx \text{ converge} \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx \text{ converge}$$

$\downarrow$ esponente $2 > 1$ $\downarrow$ confronto tra integrali con integranda positiva $\downarrow$ Assoluta convergenza (integrab.)

Da non dire mai

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ converge} \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx \text{ converge per confronto}$$

Se fosse $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ diverge per confronto asintotico con $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

Se provo l'assoluta integrabilità per $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ mi

ritrovo alla fine con $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx$. Questo diverge, quindi non si può dire nulla!!

In questo caso funziona l'integrazione per parti

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{10} + \int_{10}^{+\infty} \leftarrow \text{basta studiare questo}$$

Numero: $\frac{\sin x}{x}$ è funzione limitata!

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{1}{x} \cdot \sin x dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \left[\frac{-\cos x}{x} \right]_0^A - \int_0^A \left(-\frac{1}{x^2} \right) (-\cos x) dx \right\}$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{-\cos A}{A} + \frac{\cos 0}{10} - \int_{10}^A \frac{\cos x}{x^2} dx \right\} = \frac{\cos 10}{10} - \int_{10}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

$\downarrow$ 0 $\downarrow$ converge: visto sopra!

Esercizio Usare lo stesso metodo per dimostrare che

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{2x}}_G \underbrace{\sin x^2}_{f} dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{2x} \cos x^2 dx \quad \text{convergono}$$

Vedere con quali altri esponenti (invece di x^2) la cosa funziona.

Esercizio $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ stessi problemi di sopra

Idea: "integrazione per parti" sulle serie

Siano a_n e b_n 2 successioni. Sia $A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ($A_0 = 0$)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i b_i &= \sum_{i=1}^n (A_i - A_{i-1}) b_i = \sum_{i=1}^n A_i b_i - \sum_{i=1}^n A_{i-1} b_i \\ &= \sum_{i=1}^n A_i b_i - \sum_{i=0}^{n-1} A_i b_{i+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} A_i b_i + A_n b_n - \sum_{i=1}^{n-1} A_i b_{i+1} - \underbrace{A_0 b_1}_{=0} \\ &= A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}) \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1})$$

Proprietà delle
somme

Facciamo 2 ipotesi:

- ① $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $|A_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- ② La successione b_n è positiva, deb. decr. e $b_n \rightarrow 0$

Allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge

Dim. Devo fare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \underbrace{A_n b_n}_0 + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}) \right\}$
 $= \sum_{i=1}^{\infty} A_i (b_i - b_{i+1}) \Leftarrow$ devo dim. che converge

La seconda serie converge assolutamente. Infatti

$$|a_i| \cdot |b_i - b_{i+1}| \leq M \underbrace{(b_i - b_{i+1})}_{\substack{\textcircled{1} \quad \textcircled{2} \\ \text{---} \text{---} \text{---}}} \quad \text{e questa è una serie} \\ \text{telescopica} \quad b_1 - \cancel{b_2} + \cancel{b_2} - \cancel{b_3} + \cancel{b_3} - \dots$$

Applico il criterio a $\sum \frac{\sin n}{n}$ con $b_n = \frac{1}{n}$ (ipotesi ok)
e $a_n = \sin n$. Devo verificare l'ipotesi ①, cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|\sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Questo si dimostra con i numeri complessi. Prendo $x = e^i$.
Allora $x^k = e^{ki} = \cos k + i \sin k$

$$x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = (\cos 1 + \cos 2 + \dots + \cos n) + i(\sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n) \\ = x \frac{x^n - 1}{x - 1} = e^i \frac{e^{ni} - 1}{e^i - 1} = z_n$$

Devo stimare $\text{Im}(z_n)$ e la stimo con $|z_n|$

$$|z_n| = \underbrace{|e^i|}_1 \underbrace{\frac{|e^{ni} - 1|}{|e^i - 1|}}_{\text{numero } \neq 0} \leq \frac{|e^{ni}| + 1}{|e^i - 1|} = \frac{2}{|e^i - 1|} = M$$

Come sottoprodotto abbiamo ottenuto che le successioni

$$\cos 1 + \cos 2 + \dots + \cos n \quad \text{e} \quad \sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n$$

sono limitate.

Calcolare $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. Più in generale calcoliamo

$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} dx$$

Brutalmente: ① $F(0)$ è quello che voglio calcolare

[2] Calcoliamo $F'(\lambda)$. Brutalmente

$$F'(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \underbrace{e^{-\lambda x} (-x)}_{\text{derivata rispetto a } \lambda} dx = - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \sin x dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} (-\sin x) dx &= \underbrace{e^{-\lambda x}}_G \underbrace{\cos x}_F - \int_0^{+\infty} (-\lambda e^{-\lambda x}) \cos x dx \\ &= e^{-\lambda x} \cos x + \lambda \int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-\lambda x}}_G \underbrace{\cos x}_F dx \\ &= e^{-\lambda x} \cos x + \lambda \left\{ \underbrace{e^{-\lambda x}}_G \underbrace{\sin x}_F - \int_0^{+\infty} (-\lambda e^{-\lambda x}) \sin x dx \right\} \\ &= e^{-\lambda x} \cos x + \lambda e^{-\lambda x} \sin x + \lambda^2 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \sin x dx \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$(\lambda^2 + 1) \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \sin x dx = -e^{-\lambda x} (\cos x + \lambda \sin x) \quad (\text{controllare i segni})$$

Integrando in $[0, +\infty)$ ottengo

$$(\lambda^2 + 1) \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \sin x dx = 1$$

$$\text{Quindi alla fine} \quad F'(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2 + 1} \quad (\text{per } \lambda > 0)$$

$$\text{Quindi} \quad F(\lambda) = -\arctan \lambda + c$$

$$[3] \text{ Per calcolare } c \text{ faccio } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} F(\lambda) = \int_0^{+\infty} 0 dx = 0$$

$$\text{Quindi } c = \frac{\pi}{2}, \text{ ma allora } F(0) = c = \frac{\pi}{2}.$$