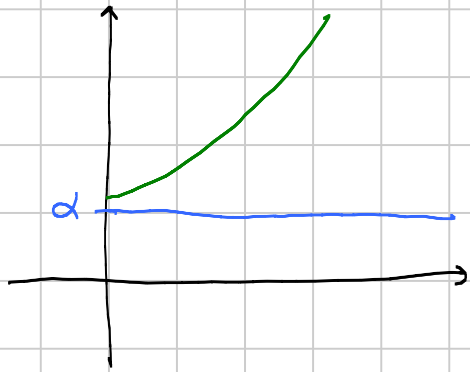
SSSUP 2010 — LEZIONE 24

Titolo nota 28/04/2010

Esercizio: provare a dim. l'unicità della soglia in $u' = u^2 - t^2$.

<u>Esempio 1</u> $\begin{cases} u' = \dfrac{1}{u^2+t^2} \\ u(0) = \alpha > 0 \end{cases}$



$\boxed{\text{Fatto 1}}$ L'esistenza globale è quasi gratis (per tempi ≥ 0). Infatti sarà $u(t) \geq \alpha$ per ogni $t \geq 0$, quindi

$$u' = \frac{1}{t^2+u^2} \leq \frac{1}{\alpha^2}$$ Derivata limitata $\Rightarrow$ esistenza globale

$\boxed{\text{Fatto 2}}$ Cosa posso dire di $\lim_{t \to +\infty} u(t)$? Se fosse $l \in \mathbb{R}$, allora $u'(t) \to 0$ e questo è compatibile ...

[Oss. / ripasso: se fosse $u' = \frac{1}{u^2+t}$, allora l non può essere reale. Infatti brutalmente sarebbe

$u' \sim \frac{1}{l^2+t} \sim \frac{1}{t}$, quindi $u \sim \log t$ e questa non ha limite reale].

Nell'esempio $u' \sim \frac{1}{t^2}$, il che è compatibile con un limite $\in \mathbb{R}$

In questo caso il limite è finito per ogni $\alpha > 0$!!!! Infatti

$$u(t) - u(1) = \int_1^t u'(s)\,ds = \int_1^t \frac{1}{u^2(s)+s^2}\,ds \leq \underbrace{\int_1^t \frac{1}{s^2}\,ds}$$

Quando $t \to +\infty$ questo converge ad un numero K

Quindi $u(t) \leq u(1) + K$ e non può tendere a $+\infty$.

Domanda: esiste un dato iniziale per cui il limite è 2010 ?

Idea: trovare dati per cui $l > 2010$ e dati per cui $l < 2010$. In mezzo ...

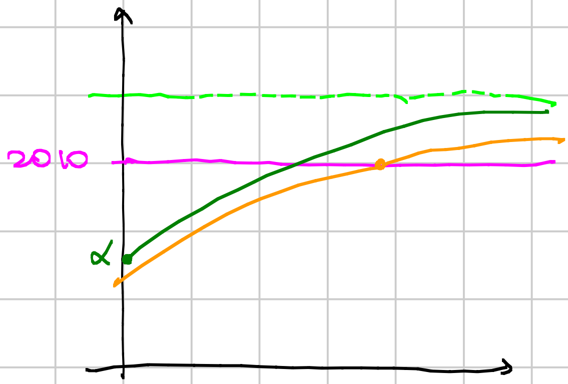
Fatto 3 Esistono dati per cui $l > 2010$ (basta partire sopra...)
Se succede per α, succede dopo

Fatto 4 Esistono dati per cui $l < 2010$? Sì: partiamo da $\alpha = 1$
Infatti

$$u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s)\,ds = 1 + \int_0^t \frac{1}{u^2(s) + s^2}\,ds$$

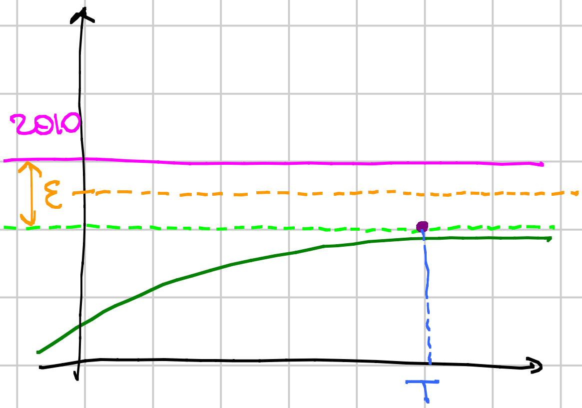
$$\leq 1 + \int_0^t \frac{1}{1+s^2}\,ds \leq 1 + \frac{\pi}{2} \leq 2010$$

Fatto 5 Prendiamo un α in mezzo. Non può essere che
$\lim_{t \to +\infty} u(t) > 2010$



Si trova facilmente un α + piccolo per cui il limite è ancora > 2010

Fatto 6 Può essere un limite < 2010?



Idea: trovare soluzione + grande che ha limite ancora < 2010
Parto sulla retta $u = 2010 - \varepsilon$ con T abbastanza grande. Allora

$$u(t) - u(T) = \int_T^t u'(s)\,ds = \int_T^t \frac{1}{u^2 + s^2}\,ds$$

$$\leq \int_T^t \frac{1}{s^2}\,ds \leq \underbrace{\int_T^{+\infty} \frac{1}{s^2}\,ds}$$

se T è abbastanza grande, questo è $\leq \frac{\varepsilon}{2}$

Questo dice che
$$\lim_{t \to +\infty} u(t) \leq u(T) + \frac{\varepsilon}{2} < 2010$$

Fatto 7 Partendo in mezzo, l'unica possibilità rimasta è che sia $l = 2010$

$\boxed{\text{Fatto 8}}$ Unicità. Supponiamo che ci siano 2 soluzioni $u(t)$ e $v(t)$ che tendono a zero, e supponiamo $u(t) < v(t)$. Pongo $w(t) = v(t) - u(t)$. È chiaro che $w(t) > 0$ e $w(t) \to 0$ per $t \to +\infty$.

$$w'(t) = v'(t) - u'(t) = \frac{1}{v^2+t^2} - \frac{1}{u^2+t^2} = \frac{u^2+\cancel{t^2}-v^2-\cancel{t^2}}{(v^2+t^2)(u^2+t^2)} =$$

$$= \frac{(u+v)\overbrace{(u-v)}^{-w(t)}}{(v^2+t^2)(u^2+t^2)} \leq 0 \qquad \text{Acc...}$$

Però..., $w'(t) = -w(t) \cdot \text{roba}(t)$

Questa è un'eq. diff. lineare che si può "risolvere"

$$w(t) = w(0) \cdot e^{-\text{Roba}(t)}$$ primitiva di roba (t)

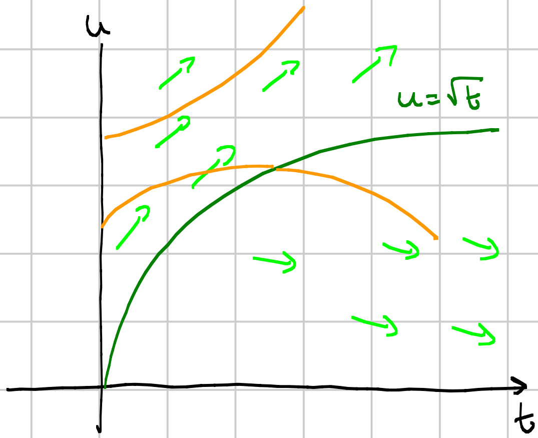
Cosa succede quando $t \to +\infty$? Tutto dipende da $\lim_{t\to+\infty} \text{Roba}(t)$, cioè da

$$\int_0^{+\infty} \text{roba}(t)\, dt = \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{u+v}{(v^2+t^2)(u^2+t^2)}\, dt}_{=I} < +\infty$$

perché u e v sono limitate e c'è t^4 sotto

Ma allora $\lim_{t\to+\infty} w(t) = w(0) \cdot e^{-I} \neq 0$ il che è assurdo.

—o—o—



<u>Esempio 2</u> $\begin{cases} u' = \arctan(u^2 - t) \\ u(0) = \alpha \end{cases}$

$\boxed{\text{Fatto 1}}$ Esistenza globale gratis.

$\boxed{\text{Fatto 2}}$ Ci sono soluzioni non monotone (basta partire su $u = \sqrt{t}$)

$\boxed{\text{Fatto 3}}$ Ci sono soluzioni monotone? Se ci sono, al max crescono come rette con coeff. al $+\pi/2$

Idea: trovare una sottosoluzione che non tocca.
La cerchiamo del tipo $v(t) = t + \alpha$ con α da scegliere bene.
Impongo che sia una sottosoluzione:

$$v' \leq \arctan\left(v^2 - t\right) \qquad \text{cioè}$$

$$1 \leq \arctan\left(t^2 + 2\alpha t + \alpha^2 - t\right) = \arctan\left(t^2 + (2\alpha - 1)t + \alpha^2\right)$$

La disuguaglianza deve valere $\forall\, t \geq 0$.
Basta scegliere α in modo tale che $2\alpha - 1 \geq 0$ e $\arctan \alpha^2 \geq 1$.
Infatti a quel pto

$$\arctan(\dots) \geq \arctan(t^2 + \alpha^2) \geq \arctan \alpha^2 \geq 1.$$

Inoltre, sempre per α grande si ha che $t + \alpha$ sta sempre sopra $u = \sqrt{t}$.

<u>Question</u>: cosa succede in mezzo.