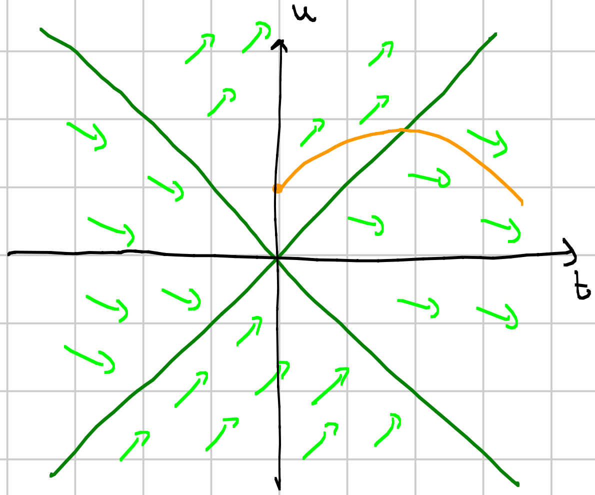
SSSUP 2010 – LEZIONE 023

Titolo nota 28/04/2010

<u>Esempio 1</u> $\begin{cases} u' = u^2 - t^2 \\ u(0) = \alpha \end{cases}$ Dim. che esiste $\alpha > 0$ t.c. il problema ha soluzione globale (per $t \geq 0$) monotona crescente.



$\boxed{\text{Fatto 1}}$ Ci sono soluzioni che toccano $u = t$ poi scendono e hanno esistenza globale per $t \geq 0$.

Perché ci sono? Basta partire dalla bisettrice.

Perché hanno esistenza globale?

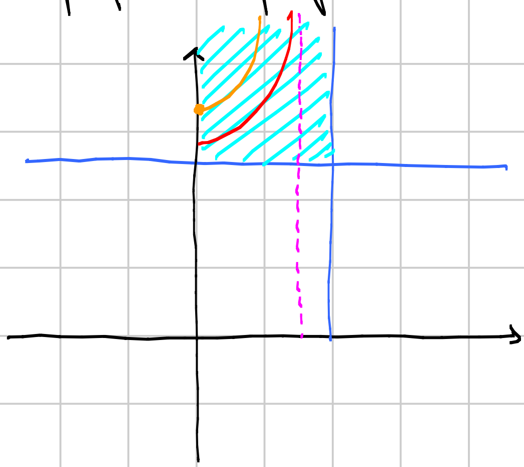
Non possono toccare la retta $u = -t$ perché dovrebbero arrivare da sopra con derivata $= 0$.

$\boxed{\text{Fatto 2}}$ Se per un certo $\alpha > 0$ ho il comp. descritto al fatto 1, allora ho lo stesso per tutti i $\beta \in (0, \alpha)$.

$\boxed{\text{Fatto 3}}$ Esistono soluzioni che hanno blow-up per tempi positivi.

La colpa è di u^2.

$$u' = u^2 - t^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{serve} \\ t \leq 1}}{\geq} u^2 - 1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{serve} \\ u \text{ grande}}}{\geq} \frac{u^2}{2}$$



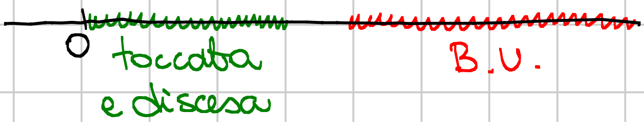
Risolvo il problema $v' = \dfrac{v^2}{2}$.

Volendo trovo esplicitamente le soluzioni e scopro che hanno tutte blow-up e più il dato è grande, e più il tempo di BU è piccolo (tende a 0 quando il dato tende a $+\infty$). Quindi ci sono soluz. nella zona tratt. In quella zona v è sottosoluz. dell'eq. iniziale: infatti

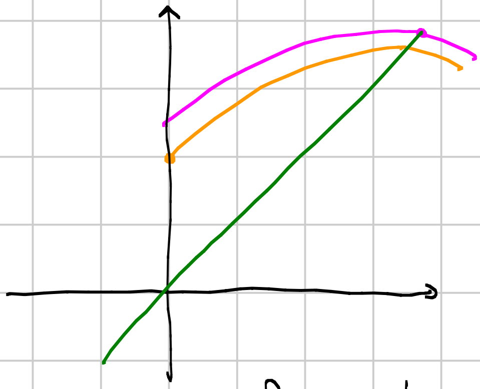
$$v' = \frac{v^2}{2} \leq v^2 - 1 \leq v^2 - t^2 \quad \text{(conto di sopra)}.$$

Le soluzioni che partono sopra hanno per forza blow-up.

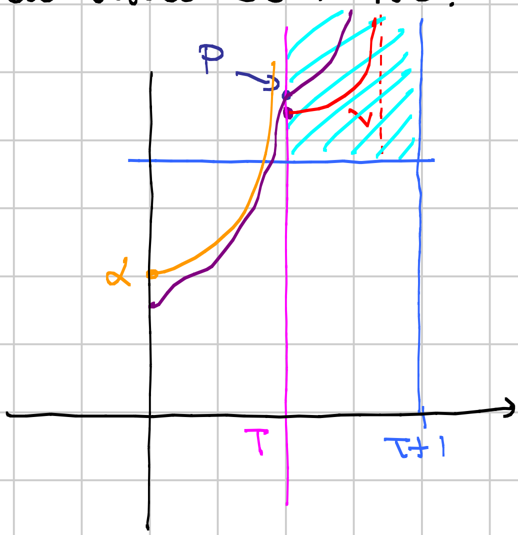
Fatto 4 Se per un certo $\alpha > 0$ c'è BU, allora c'è per tutti i $\beta > \alpha$.



Fatto 5 Un α "in mezzo" (tra sup verdi e inf rossi) può essere verde? No! Basterebbe partire da un pto di $u=t$ + alto e avrei che α non è $\geq$ del sup. dei verdi.
Questo dice che la zona verde è aperta.



Fatto 6 Partendo da un α in mezzo, ci può essere BU? NO!
Idea: se ci fosse BU, allora ci sarebbe anche partendo un po' sotto.
Idea: parto molto alto dall'asintoto.



$$u' = u^2 - t^2 \underset{0 \le t \le T+1}{\geq} u^2 - (T+1)^2 \underset{u \text{ grande}}{\geq} \frac{u^2}{2}$$

ancora una volta risolvo $v' = \frac{v^2}{2}$
con dato $v(T)$ = abbastanza grande.
In questo caso la sol. ha BU <u>prima di $T+1$</u>
Considero la sol. u che passa per P. Questa
* per $t \geq T$ è costretta ad avere BU prima di $T+1$ (sta sopra v)
* per $t \leq T$ esisterà tranquilla stando sotto quella arancio.

Quindi abbiamo trovato una soluz. con BU e dato $< \alpha$.
Anche la zona rossa è aperta.

Fatto 7 Per sup verdi $\leq \alpha \leq$ inf rossi si ha che
* la soluzione non ha B.U. (sarebbe rossa)
* la soluzione non tocca $u=t$ (sarebbe verde)

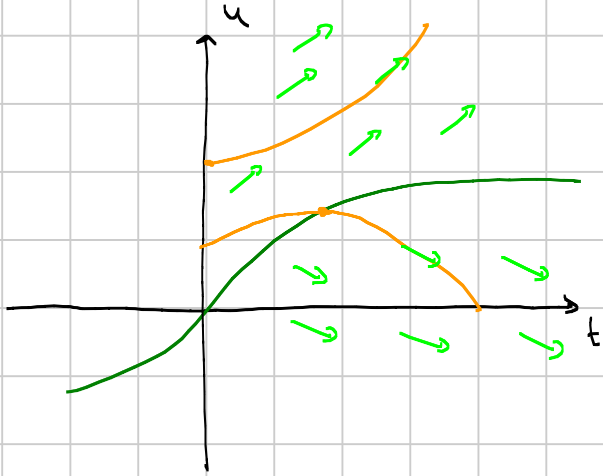
L'unica possibilità è che sia globale e crescente

Fatto 8 C'è un unico α con la proprietà data, cioè il sup e l'inf. coincidono.

Vediamo la stessa cosa in un caso più semplice

— o — o —

Esempio 2 $\begin{cases} u' = u - \arctan t \\ u(0) = \alpha > 0 \end{cases}$



Fatto 1 L'esistenza globale è gratis

$|f(t,u)| \leq A|u| + B.$

In questo caso

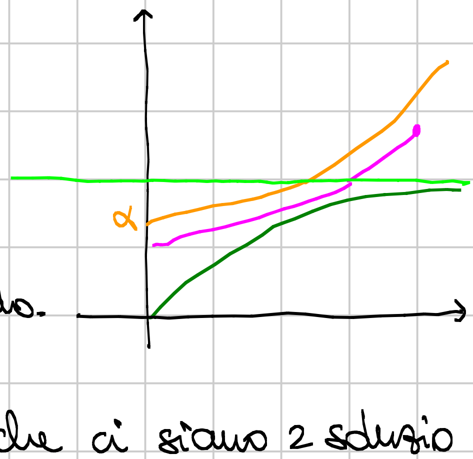
$|u - \arctan t| \leq |u| + |\arctan t| \leq |u| + \frac{\pi}{2}.$

Fatto 2 Esistono α per cui la sol. non è monotona: basta partire dalla curva $u = \arctan t$. Se per un α succede, succede per quelli prima

Fatto 3 Esistono α per cui $u(t)$ è strett. cresc. e tende a $+\infty$. Basta prendere $\alpha = 10$ (serve teo. asintoto ...). Se per un α succede, succede per quelli dopo.

Fatto 4 Che succede in mezzo?

* Non può toccare $u = \arctan t$ (altrimenti riparto un po' sopra sulla curva...)
* Non può toccare $u = \pi/2$, perché potrei trovare una soluzione che parte sotto e ancora tende a $+\infty$



L'unica possibilità è che tenda a $\frac{\pi}{2}$ crescendo.

Fatto 5 Questo α è unico. Supponiamo che ci siano 2 soluzioni $u(t)$ e $v(t)$ che tendono a $\frac{\pi}{2}$, e supp. $u(0) < v(0)$.

Pongo $w(t) = v(t) - u(t)$. Che cosa risolve $w(t)$?

$$w'(t) = v'(t) - u'(t) = v(t) - \cancel{\arctan t} - u(t) + \cancel{\arctan t}$$

$$w'(t) = v(t) - u(t) > 0$$

perché essendo $v(0) > u(0)$ si avrà sempre $v(t) > u(t)$

Quindi $w(0) > 0$ e cresce. Ma allora non è possibile che $\lim_{t\to+\infty} w(t) = 0$.

$\boxed{\text{Fatto 6}}$ α si riesce "quasi" a calcolare perché l'equazione è lineare.

$u' = u - \arctan t$, $\quad u' - u = -\arctan t \quad$ Moltiplico per e^{-t}

$$u'e^{-t} - u e^{-t} = -\arctan t \cdot e^{-t}$$

$$(ue^{-t})' = -\arctan t \cdot e^{-t} \quad \text{quindi integrando in } [0,t]$$

$$u(t)e^{-t} - \underbrace{u(0)}_{\alpha} = -\int_0^t \arctan s \cdot e^{-s}\, ds$$

$$u(t)e^{-t} = \alpha - \int_0^t \arctan s \cdot e^{-s}\, ds \quad \text{da cui}$$

$$\boxed{u(t) = e^t \left\{ \alpha - \int_0^t \arctan s \cdot e^{-s}\, ds \right\}}$$

Formula esplicita, modulo l'integrale

Quando $t \to +\infty$, tutto dipende da

$$\alpha \gtreqless \underbrace{\int_0^{+\infty} \arctan s \cdot e^{-s}\, ds}_{\text{integrale improprio convergente}}$$

$\alpha > \dots \quad u(t) \to +\infty$

$\alpha < \dots \quad u(t) \to -\infty$

$\alpha = \dots \quad u(t) \to \frac{\pi}{2}$

Si vede anche dalla formula che per α critico $u(t) \to \frac{\pi}{2}$.

Infatti

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\alpha - \int_0^t \dots}{e^{-t}} \underset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{-\arctan t \cdot e^{-t}}{-e^{-t}} = \frac{\pi}{2}.$$