SSSUP 2010 – LEZIONE 22

Titolo nota — 22/04/2010

<u>Sopra e sottosoluzioni</u> Consideriamo il problema $\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$

Si dice soprasoluzione una qualunque funzione $v(t)$ tale che

$$\begin{cases} v' > f(t,v) \\ v(0) > u_0 \end{cases} \qquad \text{(dove } v \text{ è definita)}$$

Brutalmente v parte sopra u e cresce di più.

<u>Teorema</u> Per $t \geq 0$ si ha che $v(t) > u(t)$ finchè sono definite.

Sottosoluzioni $\begin{cases} w' < f(t,w) \\ w(0) < u_0 \end{cases}$ <u>Teorema</u> Per $t \geq 0$ si ha che $w(t) < u(t)$ dove definite.

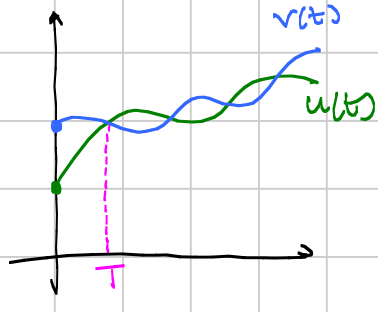
<u>Oss.</u> Sopra e sottosoluzioni servono a delimitare le zone in cui $u(t)$ può andare.

<u>Oss. importante</u> Se metto disuguaglianze $\geq$ e $\leq$ i teoremi continuano a valere con $\geq$ e $\leq$ purchè $f(t,u)$ soddisfi le ipotesi del teo. di unicità

$\boxed{\text{Dim. del teorema con soprasoluzioni}}$ Occhio: non posso confrontare $f(t,u)$ e $f(t,v)$ in generale

Supponiamo per assurdo che non sia vero che $v(t) > u(t)$.
Pongo allora

$$T = \inf \{ t \geq 0 : v(t) \leq u(t) \}$$



Considero la funzione

$$w(t) = v(t) - u(t)$$

È facile dimostrare che

$$w'(T) \leq 0$$

D'altra parte

uguali in T

$$w'(T) = v'(T) - u'(T) > f(T, v(T)) - f(T, u(T)) = 0.$$

Assurdo □

Esempio 1 $\quad \begin{cases} u' = u^2 - e^t \\ u(0) = \alpha \end{cases}$ Domanda: esistono valori di $\alpha > 0$ per cui ho blow-up?

Basta trovare una sottosoluzione che ha blow-up!!!

Come trovarla?

Penso al problema $u' = u^2$. Le soluzioni di questo hanno blow-up e sono della forma

$$u(t) = \frac{1}{c-t}.$$

Ora provo a giocare sui parametri $w(t) = \frac{1}{a-tb}$ $(a>0, b>0)$

Sarà vero che questa è sottosoluzione del problema originario (fino a quando esiste?). Sostituisco

$$w'(t) = \frac{b}{(a-tb)^2} < w^2 - e^t = \frac{1}{(a-tb)^2} - e^t \quad \text{per } 0 \leq t < \frac{a}{b}$$

Devo quindi sperare che

$$\frac{b}{(a-tb)^2} < \frac{1}{(a-tb)^2} - e^t \qquad \forall\, 0 \leq t < \frac{a}{b}$$

Questo può succedere per valori "piccoli" di b

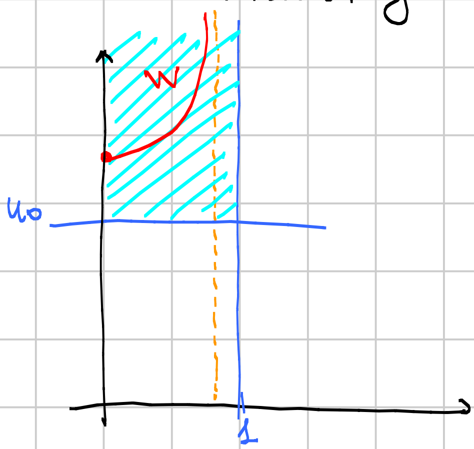
— o — o —

Altro modo di vedere la stessa cosa. Consideriamo $0 \leq t \leq 1$.

Allora

$$u' = u^2 - e^t > u^2 - e > \frac{u^2}{2} \quad \text{se } u \text{ è abbastanza grande}$$

cioè $u \geq u_0$



Risolvo $w' = \frac{w^2}{2}$. Le soluzioni di questa hanno tutte blow-up e più parto in alto, prima ho il blow-up (c'è la formula esplicita).

Dunque esiste una soluzione di $w' = \frac{w^2}{2}$ che vive tutta nella zona tratteggiata

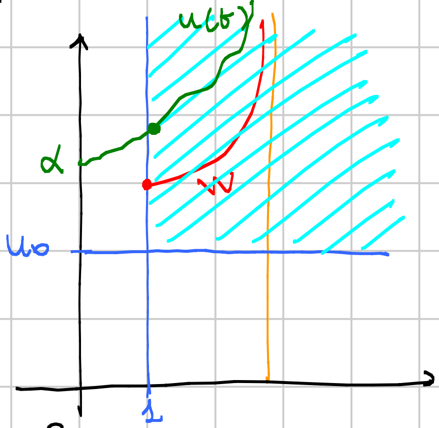
Dico che $w(t)$ è una sottosoluzione del problema originario.
Infatti banalmente si ha che

$$w'(t) = \frac{w^2}{2} < w^2 - e \le w^2 - e^t$$

occhio: questo vale solo nella zona tratteggiata

—o—o—

Esempio 2 $\quad \begin{cases} u' = e^{tu} \\ u(0) = \alpha \end{cases}$ $\quad$ Esistono valori per cui si ha blow-up



$$u' = e^{tu} \ge e^{u} \ge u^2$$

qui serve $t \ge 1$

forse sempre, ma per lo meno per $u \ge u_0$

Ora considero il problema $w' = w^2$, con $w(1) = \beta$
Questa ha tante soluzioni che hanno blow-up nella zona tratteggiata.
Per trovare una u che scoppia basta che parta per $t=1$ sopra la w. Tornando indietro fino a $t=0$ trovo l'α richiesto.

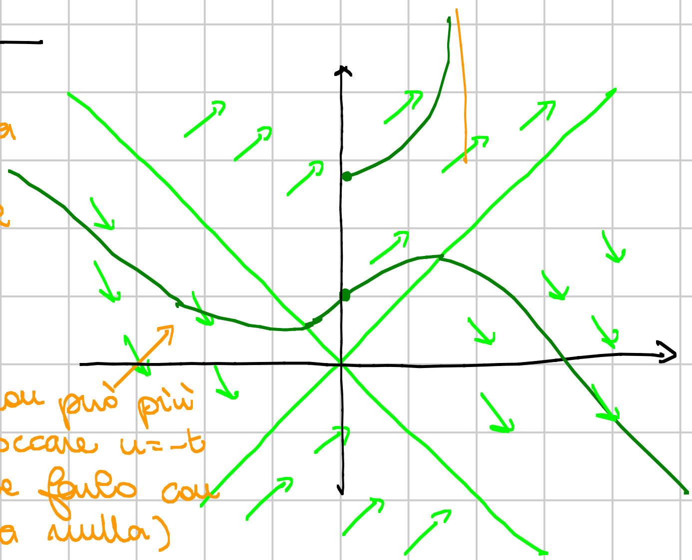
Cosa da dimostrare è che w è sottosoluzione nella zona tratteggiata, cioè

$$w' = w^2 \le e^{w} \le e^{tw}$$

—o—o—

Esempio 3 $\quad \begin{cases} u' = u^2 - t^2 \\ u(0) = \alpha \end{cases}$

esistenza globale con limite $t\infty$



non può più toccare $u=-t$ (dovrebbe farlo con derivata nulla)

Segno di u'.
Possibilità per $t>0$
① tocca e poi scende per sempre
② non tocca + blow-up (succede)
③ non tocca + esistenza globale