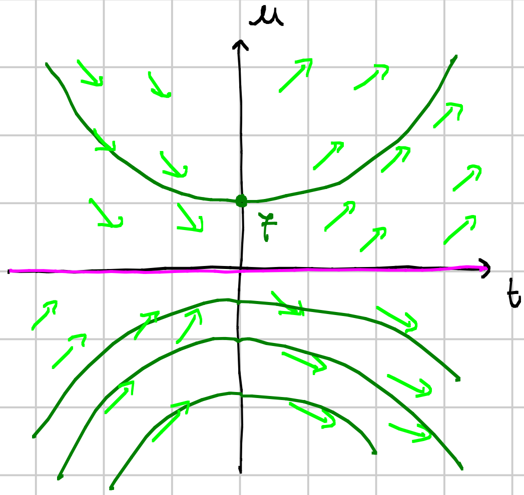
SSSUP 2010 — LEZIONE 21

Titolo nota 22/04/2010

Eq. Diff. non autonome

Esempio 1 $\begin{cases} u' = \arctan(tu) \\ u(0) = 7 \end{cases}$ Ci sono soluzioni stazionarie? SI: $u(t) \equiv 0$

⇒ la soluzione sarà sempre > 0.



Fatto 2 $|f(t,u)| \leq \frac{\pi}{2}$ ⇒ no blow-up
⇒ esistenza globale

Studio il segno di $f(t,u)$ per vedere dove u cresce e dove u decresce.

$f(t,u) > 0 \Leftrightarrow tu > 0$

Fatto 3 $\lim_{t \to +\infty} u(t)$ esiste per monotonia ($\in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$) ed è ≥ 7.

Applico il teo. dell'asintoto. Supponiamo per assurdo che $\lim = \ell \in \mathbb{R}$
Allora

$$\lim_{t \to +\infty} u'(t) = (\text{o non esiste o è } 0)$$
$$= \lim_{t \to +\infty} \arctan(\underset{\downarrow\, +\infty}{t}\, \underset{\downarrow\, \ell}{u(t)}) = \frac{\pi}{2} \quad \text{Assurdo!}$$

Analogamente: $\lim_{t \to -\infty} u(t) = +\infty$.

Fatto 4 Sarà convessa? $\boxed{\text{SI}}$

$$u''(t) = [\arctan(t u(t))]'$$
$$= \frac{1}{1+t^2u^2}(tu)' = \underbrace{\frac{1}{1+t^2u^2}}_{>0}(\overbrace{u}^{>0} + \overbrace{tu'}^{\geq 0})$$

$+ : +$

> 0

Oss. Non è + vero che le soluzioni si ottengono le une dalle altre per traslazione. Tutte le soluzioni hanno asint. obliquo.

__Fatto 5__ Si può dire che $u(t)$ è pari? Pongo $v(t) = u(-t)$

Che cosa risolve $v(t)$?

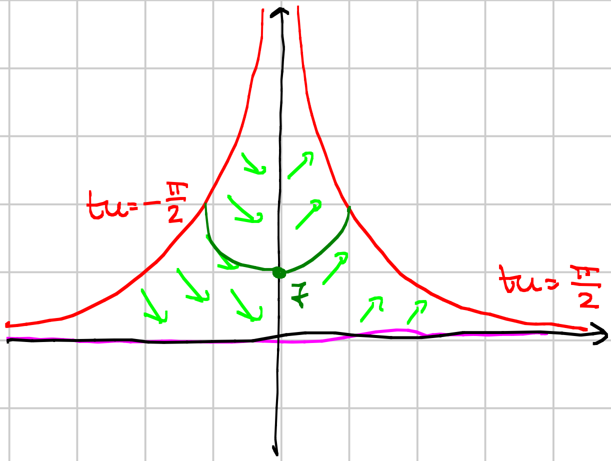
$$v'(t) = -u'(-t) = -\arctan((-t)\,u(-t)) = -\arctan(-t\,v(t))$$
$$= \arctan(t\,v(t))$$

Quindi $v(t)$ risolve la stessa equazione con lo stesso dato iniziale, quindi per unicità $u(t) = v(t) = u(-t) \Rightarrow u$ è pari.

__Esercizio__ La soluzione con $u(0) = -7$ è $-$ sol. con $u(0) = 7$.

— o — o —

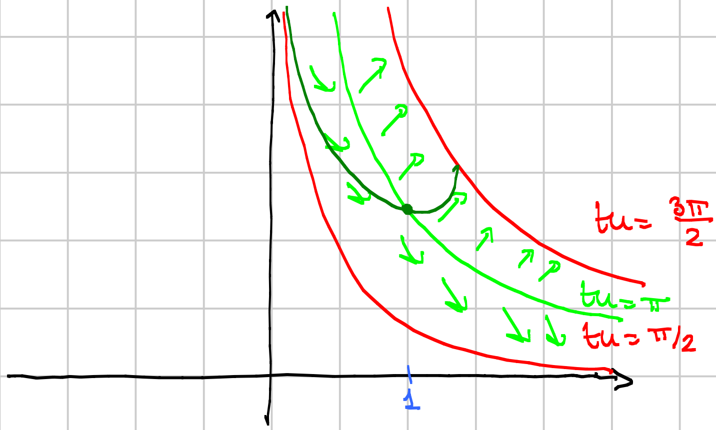
__Esempio 2__ $u' = \tan(tu)$
$u(0) = 7$



$u(t) \equiv 0$ è soluzione come prima.
Inoltre $\tan(tu)$ non è definita quando $tu = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\tan(tu) > 0$. L'esistenza è solo locale e la soluzione ha break-down in tempo finito nel passato e nel futuro $(u'(t) \to \pm\infty)$.

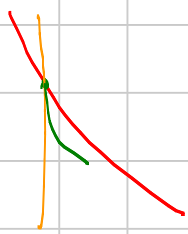
__Esempio 3__ $\begin{cases} u' = \tan(tu) \\ u(1) = \pi \end{cases}$



$\tan(tu) > 0$ (nella zona in questione) $\Leftrightarrow \pi < tu < \frac{3\pi}{2}$

Per $t > 1$ la soluzione ha break-down in tempo finito (con $u' \to +\infty$)

Per $t < 1$ la soluzione "potrebbe" schiantarsi contro $tu = \frac{\pi}{2}$, ma lo dovrebbe fare con derivata $\to -\infty$, e questo non è possibile perché andrebbe fatto "da sotto".

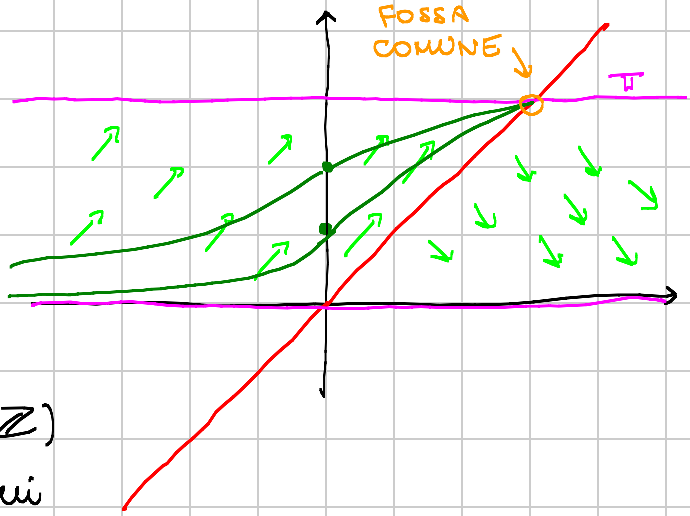


Quindi la soluzione esiste fino al tempo $t=0$ in cui ha blow-up a $+\infty$

— o — o —

<u>Esempio 4</u> $\quad u' = \dfrac{\sin u}{u-t}$

$u(0)=1$



Zona rossa = retta $u=t$

Soluzioni stazionarie:

$u(t)\equiv 0$, ma anche $u(t)=k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

(occhio: burocraticamente le soluzioni stazion. non esistono globalmente)

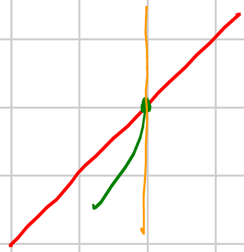
$\boxed{t \text{ negativi}}$ La soluzione esiste globalmente (blow-up e break down esclusi) ed è monotona.

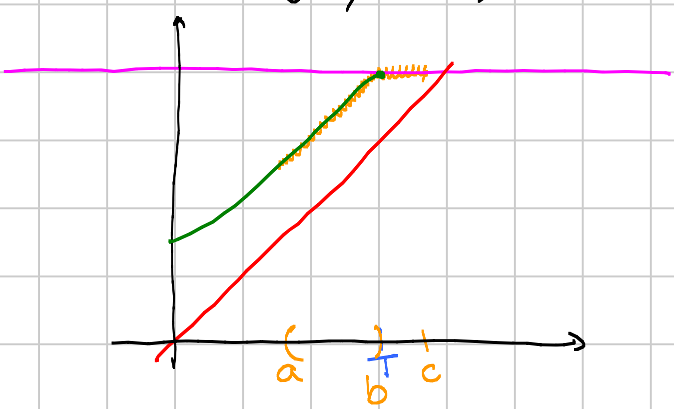
Nota bene: tutti i limiti in $[0,1)$ sono compatibili con il teo. dell'asintoto !!

$\boxed{t \text{ positivi}}$ $u(t)$ non può toccare la retta π (prima di $t=\pi$) per ragioni di unicità

$u(t)$ non può toccare la retta $u=t$ (prima di $t=\pi$) perché dovrebbe farlo con derivata $+\infty$, dunque da sotto

Quindi la soluzione ha per forza break-down per $t=\pi$, cioè tende al punto (π,π). NB: $u' \not\to \pm\infty$.





Lemma di rincollamento:

data una soluzione in (a,b) e una soluzione in (b,c). Se queste hanno i limiti che coincidono in b (e vivono lontano dal dom. di $f(t,u)$), allora la loro unione è sol. in (a,c)

Dim. Lemma di rincollamento: basta dimostrare che la u "rincollata" risolve l'equazione anche per $t = b$.

Oss. Il lemma di rincollamento serve per dire che una soluzione che non ha blow-up e non tocca zone vietate (no break-down) può essere prolungata.

Tornando all'esempio, cosa possiamo dire del limite a $-\infty$?

Brutal-mode: supponiamo $u(t) \to l > 0$ (e < 1).
Allora
$$u'(t) \sim \frac{\sin l}{l - t} \sim -\frac{1}{t}$$

Ma una funzione con $u'(t) \sim \frac{1}{t}$ non può avere asintoto orizzontale, perché moralmente $u(t) \sim \log t$

Rigorosamente: $$u(0) = u(t) + \int_t^0 u'(s)\,ds \qquad \forall\, t < 0$$
Passo al limite
$$\underset{\text{num.}}{\underset{\downarrow}{u(0)}} = \underset{\text{num.}}{\underset{\downarrow}{l}} + \underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{\int_{-\infty}^0 u'(s)\,ds}}$$

L'integrale improprio diverge per confronto asintotico con $\frac{1}{t}$