

SSSUP 2010 - LEZIONE 20

Titolo nota

15/04/2010

Dim. teo. asintotico Ipotesi: $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = l \in \mathbb{R}$.

Applico Lagrange nell'intervallo $[n, n+1]$:

$$u(n+1) - u(n) = u'(c_n) \cdot 1 \quad \text{dove } c_n \in (n, n+1)$$

È chiaro che $c_n \rightarrow +\infty$ (volendo perché $c_n \geq n$) e inoltre

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u'(c_n) = l - l = 0 \quad (\text{qui è fondamentale che } l \in \mathbb{R})$$

Occhio: non ho dimostrato che $\lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t) = 0$, ma solo che questo è vero lungo la successione c_n .

Posso quindi solo concludere che

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} u'(t) \leq 0 \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} u'(t)$$

o anche che

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} |u'(t)| = 0$$

— 0 — 0 —

Esempio 2 $\begin{cases} u' = \sin u \\ u(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

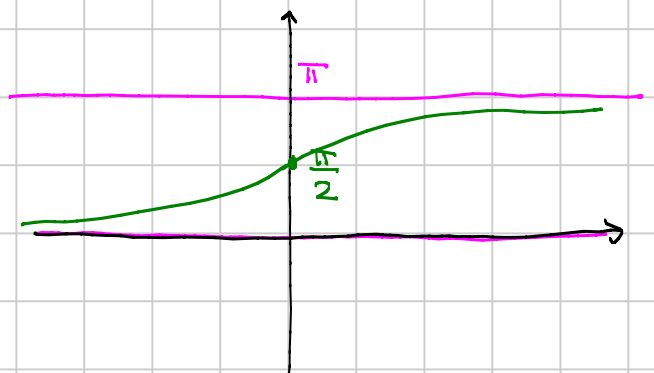
Fatto 1 La soluzione esiste, è unica ed è globale

Fatto 2 Le funzioni costanti $u(t) \equiv k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$) sono soluzioni dell'equazione.

Quindi

$$0 < u(t) < \pi \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

(se toccasse una delle 2 rette ci sarebbe non unicità)



Fatto 3 $u(t)$ è strettamente crescente, poiché

$$u'(t) = \sin u(t) > 0 \text{ quando } 0 < u(t) < \pi.$$

Fatto 4 $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \pi$ $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = 0$

Dim. il primo. Per monotonia sappiamo che $u(t) \rightarrow l \in \mathbb{R}$
(monotonia + limitatezza).

Dall'eq. deduciamo che $\lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sin u(t) = \sin l$
quindi esiste.

Ma per il teo. asintotico il limite deve fare 0, quindi $\sin l = 0$,
quindi $l = k\pi$, ma l'unico compatibile è π .

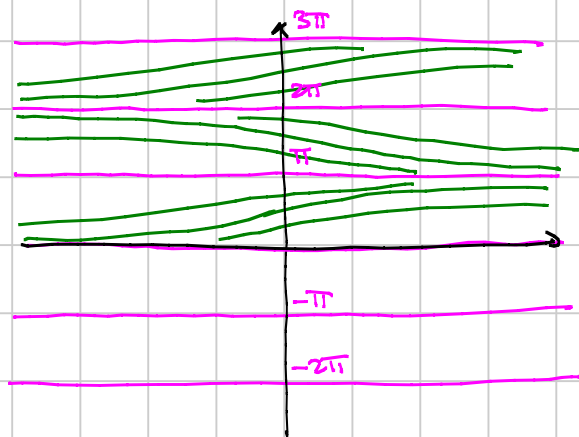
Fatto 5 Convergenza? $u'' = (\sin u)' = \cos u \cdot u' = \cos u \cdot \sin u$
 $\cos u \cdot \sin u \nearrow \begin{matrix} > 0 & \text{in } (0, \frac{\pi}{2}) & \Leftrightarrow & t < 0 \\ < 0 & \text{in } (\frac{\pi}{2}, \pi) & \Leftrightarrow & t > 0. \end{matrix}$

Fatto 6 Più in generale, le sol. dell'eq. saranno

Fatto 7 Poniamo $v(t) = \pi - u(t)$
Cosa risolve $v(t)$?

$$\begin{aligned} v'(t) &= -u'(t) = -\sin u(t) \\ &= -\sin(\pi - v(t)) \\ &= -\sin v(t) \end{aligned}$$

Quindi $v(t)$ risolve $v' = -\sin v$. Da qui si vede che
l'andamento di $u(t)$ per $t \rightarrow -\infty$ è analogo all'andamento
di $v(t)$ per $t \rightarrow +\infty$.

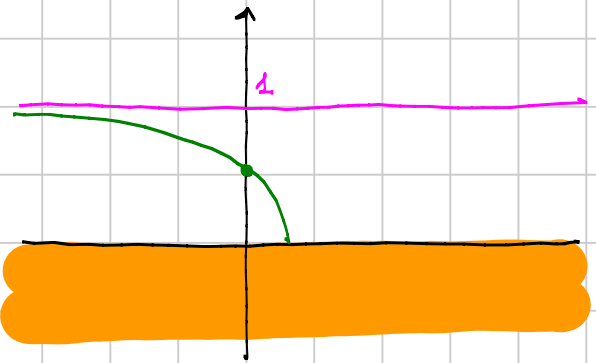


Esempio 3 $\begin{cases} u' = \log u \\ u(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Fatto 1

$u(t) \equiv 1$ è sol. stazionaria

Quindi $u(t) < 1$ finché esiste



Fatto 2 $\log u$ ha problemi per $u \leq 0$

Quindi $0 < u(t) < 1$ finché esiste.

Quindi $u'(t) < 0$ finché esiste.

Fatto 3 Per $t < 0$ si ha che $\frac{1}{2} \leq u(t) < 1$ quindi non possono esserci blow-up e break-down, quindi la soluzione esiste globalmente e tende a 1 (teo. asintotico)

Fatto 4 Per $t > 0$ abbiamo 2 possibilità: esistenza globale o break-down. Supponiamo che esista globalmente.

Allora $u(t) \rightarrow l \in [0, \frac{1}{2}]$ per $t \rightarrow +\infty$

Allora $u'(t) \rightarrow \log l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

Allora per il teo. asintotico si ha $\log l = 0$, cioè $l = 1$ che è incompatibile.

Quindi c'è per forza break-down.

Fatto 5 Convezività? $u'' = (\log u)' = \frac{u'}{u} = \frac{\log u}{u} < 0$ perché $u \in (0, 1)$.

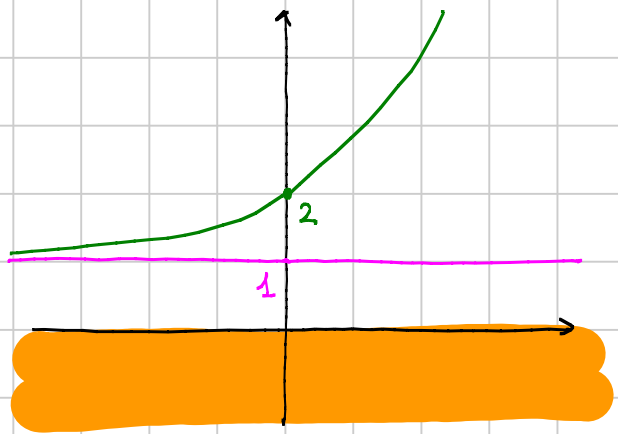
Quindi u è concava. Essendo concava, $u(t)$ sta sotto la sua tangente in $t=0$, che è la retta

$$\begin{aligned} y &= u(0) + t u'(0) \\ &= \frac{1}{2} - (\log 2) t \end{aligned}$$



Questo permette (volendo) di stimare dall'albo il tempo di vita.

Esempio 4 $\begin{cases} u' = \log u \\ u(0) = 2 \end{cases}$



Fatto 1 Finché è definita si ha che $u(t) > 1$, quindi $u'(t) > 0$

Fatto 2 Per $t < 0$ la soluzione esiste globalmente e tende a 1 (solito asintoto)

Fatto 3 Per $t > 0$ la soluzione esiste globalmente perché $\log u$ sta sotto una retta per $t \rightarrow +\infty$. Inoltre $u(t) \rightarrow +\infty$ per il solito asintoto.
Volendo è anche convessa

Fatto 4 Come cresce $u(t)$ all'infinito?

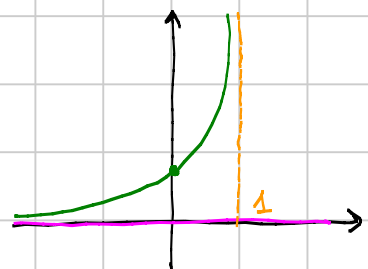
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(t)}{t} = (\text{Hôpital}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \log u(t) = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(t)}{t^2} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log u(t)}{2t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{u'}{u}}{2} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{\log u(t)}{u(t)} = 0 \end{aligned}$$

Quindi cresce + di una retta, ma meno di una parabola.

Esercizio Confrontare con t^α per $1 < \alpha < 2$.

Esempio 5 $\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = 1 \end{cases}$ Per stabilire se c'è esistenza globale per $t > 0$ bisogna



risolvere esplicitamente.

$$\frac{u'}{u^2} = 1 \quad \int \frac{u'}{u^2} = \int 1, \quad -\frac{1}{u} = t + c \quad u = \frac{1}{1-t}$$

Esercizio Studiare $u' = u^p$, $u(0) = 1$ con $p > 1$.