SSSUP 2010 - LEZIONE 19

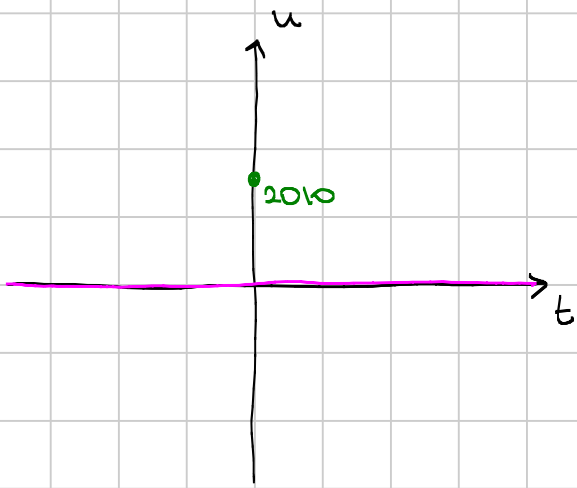
Titolo nota 15/04/2010

Studio qualitativo eq. diff. = disegnare la soluzione senza risolvere l'equazione.

Caso di equazioni del 1° ordine

$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u' = f(u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Esempio 1 $\begin{cases} u' = \arctan u \\ u(0) = 2010 \end{cases}$



Domande:
- la soluzione è globale?
- la soluzione è monotona?
- come è fatto il grafico all'incirca?

Guardo: dove u' è >0, <0, $=0$. In questo caso

$u' = \arctan u$ $\quad >0$ se $u>0$ (u cresce dove è positiva)

$=0$ se $u=0$ ($u(t)\equiv 0$ è una sol. dell' eq.)

<0 se $u<0$ (u decresce dove è negativa)

Per il teorema di unicità sappiamo che il problema (con ogni dato iniziale $u(t_0)=u_0$) ha soluzione unica (questo perchè $\arctan u$ è una funzione localmente lipschitziana).

Conseguenza: la soluzione con $u(0) = 2010$ non potrà mai annullarsi.

Perchè? Se si annullasse in un certo t_0, allora il problema con dato iniziale $u(t_0)=0$ avrebbe almeno 2 soluzioni.

Oss. generale. Tutte le volte che ho unicità, ho che 2 soluzioni o coincidono o sono sempre diverse.

$\boxed{\text{Fatto 1}}$ La soluzione del problema originario è sempre $\neq 0$, dunque sempre > 0, quindi sempre strettamente crescente ovunque sia definita.

Domanda: u è globale?

— o — o —

<u>Parentesi su esistenza globale</u>. Per il teorema di esistenza un problema di Cauchy ha (almeno) una soluzione u definita su un intervallo (a,b) tale che $t_0 \in (a,b)$.
A seconda dei casi, può succedere che
① $b = +\infty$: si dice che c'è esistenza globale nel futuro
$a = -\infty$ " " nel passato
② $b < +\infty$.
Supponiamo che (a,b) sia l'intervallo massimale in cui è definita la soluzione. Allora se $b < +\infty$ ci sono solo 2 possibilità

- BLOW-UP : $\limsup_{t \to b^-} |u(t)| = +\infty$

- BREAK-DOWN: in generale $\limsup_{t \to b^-} |u'(t)| = +\infty$, ma

rigorosamente si definisce così: supponiamo $f(t,u)$ definita in un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\liminf_{t \to b^-} \text{dist}\left((t,u(t)), \partial A\right) = 0$$

($u(t)$ tende ad uscire dall'insieme di definizione di $f(t,u)$)

Morale: se voglio dimostrare l'esistenza globale devo escludere blow-up e break-down.

— o — o —

Tornando all'esempio:

* non si può avere break-down perchè $f(t,u) = \arctan u$ è definita ovunque
* non si può avere blow-up perchè $\arctan u$ è limitata, quindi u' è limitata, quindi in un tempo finito non può tendere a $+\infty$ (volendo u è Lipschitziana).

<u>Teorema di esistenza globale</u> Supponiamo $f(t,u)$ definita su tutto $\mathbb{R}^2$ e limitata. Allora per qualunque dato iniziale il problema di Cauchy ha soluzione globale (nel passato e nel futuro).

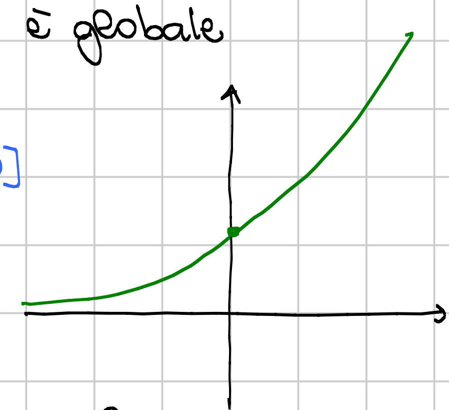
In realtà basta un'ipotesi più debole e cioè f sublineare, cioè esistono 2 costanti A e B tali che

$$|f(t,u)| \leq A + B|u|.$$

$\boxed{\text{Fatto 2}}$ La soluzione del problema iniziale è globale

Essendo monotona esistono

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) \in \underset{2010}{[0,+\infty]} \qquad \lim_{t\to-\infty} u(t) \in [0, 2010]$$



Vorremmo dimostrare che sono $+\infty$ e 0.

<u>Teorema dell'asintoto</u> Sia $u: [t_0, +\infty)$ una funzione derivabile. Supponiamo che

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = l \in \mathbb{R}.$$

Allora

$$\lim_{t\to+\infty} u'(t) \begin{cases} \nearrow 0 \\ \searrow \text{non esiste} \end{cases}$$

[Idem a $-\infty$]

<u>Esempio</u> $u(t) = \dfrac{\sin(t^{20})}{t}$ $\qquad \lim_{t\to+\infty} u(t) = 0$

$$u'(t) = -\underbrace{\frac{\sin(t^{20})}{t^2}}_{\to 0} + 20t^{18}\cos(t^{20}) \to$$ liminf $+\infty$ e liminf $-\infty$

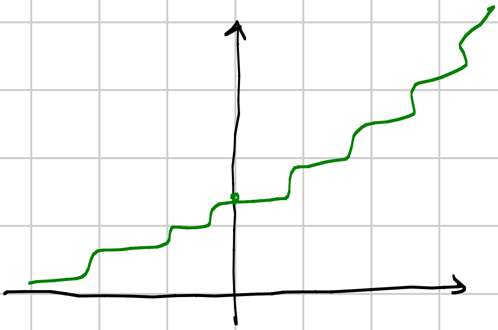
Come si applica nell'esempio?
Supponiamo per assurdo che $\lim_{t \to +\infty} u(t) = l \in \mathbb{R}$.

Allora, grazie all'equazione differenziale, si avrebbe che

$$\lim_{t \to +\infty} u'(t) = \lim_{t \to +\infty} \arctan u(t) = \arctan l.$$

Allora per il teo. dell'asintoto il limite di u' deve essere 0, quindi $\arctan l = 0$, quindi $l = 0$, il che è incompatibile con la monotonia. L'unica possibilità è dunque $l = +\infty$.

Ragionamento analogo mostra che $\lim_{t \to -\infty} u(t) = 0$.



$\boxed{\text{Fatto 3}}$ Abbiamo determinato i limiti a $\pm\infty$.

$\boxed{\text{Fatto 4}}$ u è convessa. Infatti

$$u'' = (\arctan u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$
$$= \frac{1}{1+u^2} \cdot \arctan u > 0 \implies \text{convessa}$$

$\boxed{\text{Fatto 5}}$ u cresce come una retta. Infatti

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{u(t)}{t} \quad \left[\frac{\infty}{\infty}, \text{ quindi faccio Hôpital}\right]$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{u'(t)}{1} = \lim_{t \to +\infty} \arctan u(t) = \frac{\pi}{2}$$

$\boxed{\text{Fatto 6}}$ Come si comporta $u(t)$ per $t \to -\infty$?

Brutalmente: per $u \sim 0$ è come se fosse $u' \sim u$, questa si risolve esplicitamente e le soluzioni sono del tipo ke^t.