

# Teorema di ASCOLI-ARZELÀ

Siano  $u_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una successione di funzioni.

Supponiamo che

① Esiste una costante  $C$  tale che

$$|u_n(t)| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [a, b]$$

(EQUILIMITATEZZA)

② Esiste una costante  $L$  tale che

$$|u_n(t_1) - u_n(t_2)| \leq L |t_1 - t_2| \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t_1, t_2 \in [a, b]$$

(EQUILIPSCHITZIANITÀ)

Allora esiste una sottosuccessione  $u_{n_k}$  che converge verso una funzione limite  $u(t)$  anche di Lipschitziana.

La convergenza è uniforme.

— o — o —

Siano ora un le funzioni costruite prima con la discretizzazione temporale + interpolazione affine a tratti. Dico che queste verificano le ipotesi di A.A. pur di aver preso l' insieme di definizione  $[a, b]$  abbastanza piccolo in modo che non scappino da  $B$ .

Infatti

- equilimitatezza segue dallo stare in  $B$
- equilipschitzianità segue dal fatto che la costante di Lip. di una affine a tratti è il max delle pendenze dei vari tratti e queste sono tutte  $\leq M$  purché si sta in  $B$ .

— o — o —

Vorremmo dimostrare che il limite  $u(t)$  risolve

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

Che cosa risolve  $u_n(t)$ ? Circa la stessa cosa. Vediamo cosa accade nei nodi  $t_0 + \frac{k}{n}$

$$\begin{aligned} u_n(t_0 + \frac{1}{n}) &= u_0 + \frac{1}{n} f(t_0, u_0) \\ &= u_0 + \int_{t_0}^{t_0 + \frac{1}{n}} f(s, u_n(s)) ds + \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_0 + \frac{1}{n}} \{f(t_0, u_0) - f(s, u_n(s))\} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_n(t_0 + \frac{2}{n}) &= \underbrace{u_n(t_0 + \frac{1}{n})}_{\text{orange}} + \underbrace{\frac{1}{n} f(t_0 + \frac{1}{n}, u_n(t_0 + \frac{1}{n}))}_{\text{pink}} \\ &= \underbrace{u_0 + \int_{t_0}^{t_0 + \frac{1}{n}} f(s, u_n(s)) ds}_{\text{orange}} + \\ &\quad + \underbrace{\int_{t_0}^{t_0 + \frac{1}{n}} \{ \dots \} ds}_{\text{orange}} + \underbrace{\int_{t_0 + \frac{1}{n}}^{t_0 + \frac{2}{n}} f(s, u_n(s)) ds}_{\text{pink}} \\ &\quad + \underbrace{\int_{t_0 + \frac{1}{n}}^{t_0 + \frac{2}{n}} \{f(t_1, u_1) - f(s, u_n(s))\} ds}_{\text{pink}} \end{aligned}$$

In generale avremo:

$$u_n(t_0 + \frac{k}{n}) = u_0 + \int_{t_0}^{t_0 + \frac{k}{n}} f(s, u_n(s)) ds + \int_{t_0}^{t_0 + \frac{k}{n}} \text{resti} \dots$$

da cui

$$u_{n_k}(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_{n_k}(s)) ds + \int_{t_0}^t \text{resti} \dots$$

Considero la sottosuccessione  $u_{n_k}$  e vedo cosa succede quando  $k \rightarrow \infty$ .

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$u(t) = u_0$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$? \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \quad ? 0 \text{ (spero)}$$

**FATTO 1**  $\int_{t_0}^t f(s, u_{n_k}(s)) ds \rightarrow \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$

cioè  $\int_{t_0}^t f(s, u(s)) - f(s, u_{n_k}(s)) ds \rightarrow 0$

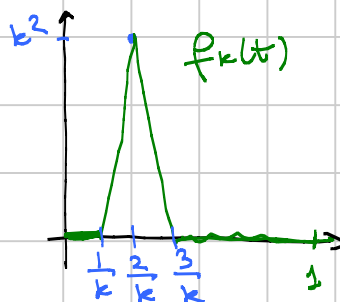
Proprietà magica:  $f$  è continua in  $B$ ,  $B$  è compatto, quindi  $f$  è uniformemente continua in  $B$ , cioè  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  t.c.

$$|f(s, a) - f(s, b)| < \varepsilon \quad \text{se} \quad |a - b| < \delta$$

Grazie alla convergenza uniforme so che  $|u(s) - u_{n_k}(s)| < \delta$  per ogni  $t$  purché  $k$  sia abbastanza grande.

Occhio: non è vero questo enunciato: se  $f_k(t) \rightarrow 0$  per ogni  $t \in [0, 1]$ , allora  $\int_0^1 f_k(t) dt \rightarrow 0$ .

$f_k \rightarrow 0$  puntualmente, ma non  
 $\int f_k \rightarrow 0$  uniformemente



**FATTO 2** Tutti i resti sono piccoli. Come sono fatti i resti?

Sono espressioni del tipo:

$$f(t_k, u_k) - f(s, u_n(s))$$

con  $s$  vicino a  $t_k$  ( $s$  sta tra  $t_k$  e  $t_{k+1}$ ) e  $u_n(s)$  sta vicino a  $u_k$  (ricordo che  $u_n(s)$  interpola  $u_k$  e  $u_{k+1}$ ).

Ancora una volta per uniforme continuità

$$|f(t, a) - f(t, b)| < \varepsilon \quad \text{se} \quad |t_2 - t_1| + |b - a| < \delta$$

— o — o —

## Dim. Ascoli - Arzelà

Prendo i numeri razionali in  $[a,b]$ , cioè  $[a,b] \cap \mathbb{Q}$  e li numero  $[a,b] \cap \mathbb{Q} = q_1, q_2, q_3, \dots$

Prendo  $u_m(q_1)$ , questi sono numeri  $\in [-c, c]$ . Quindi  $\exists$  una s. successione convergente.

Prendo  $q_2$ . Ancora una volta  $u_m(q_2) \in [-c, c]$ . Quindi  $\exists$  una s. successione convergente, che sia s. succ. della prec.

$u_m(q_1) \rightsquigarrow$  s. succ. conv.

$u_m(q_2) \rightsquigarrow$  s. succ. della prec. che converge

Procedendo così per ogni  $k$  trovo una sottosuccessione delle  $u_m(t)$  che converge per  $t = q_1, q_2, \dots, q_k$ .

Ora posso in realtà trovare una s. succ. che va bene per tutti i  $q_k$  insieme

$$u_{m_1}(q_1), u_{m_2}(q_1), u_{m_3}(q_1), \dots \rightarrow u(q_1)$$



Procedimento diagonale: prendo il primo della prima, il secondo della seconda, il terzo della terza e così via.

Così ottengo una s. succ. di tutte le s. succ. costruite strada facendo (da un certo punto in poi).

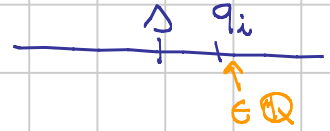
In questo modo ho trovato una s. succ.  $u_{m_k}$  t.c.

$$u_{m_k}(t) \rightarrow u(t) \quad \text{per ogni } t \in [a,b] \cap \mathbb{Q}.$$

Affermo che la stessa  $u_{m_k}$  va bene per tutti i restanti valori di  $t$ .

Idea: prendo un  $s$  che sta in  $[a,b]$ , ma non in  $\mathbb{Q}$ .

Allora



$$|u_{n_k}(s) - u(s)| =$$

$$\leq \underbrace{|u_{n_k}(s) - u_{n_k}(q_i)|}_{\text{piccolo perché } u_{n_k} \text{ è lip.}} + \underbrace{|u_{n_k}(q_i) - u(q_i)|}_{\text{piccolo perché in } \mathbb{Q} \text{ ho converg.}} + \underbrace{|u(q_i) - u(s)|}_{\text{piccolo perché } u \text{ è lip.}}$$