SSSUP 2010 — LEZIONE 17

Titolo nota 22/03/2010

$\boxed{\text{Teo. esistenza per problema di Cauchy}}$ $\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$

$f : A \to \mathbb{R}^n$ $\quad A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

aperto $\quad t \quad u = (u_1, \dots, u_n)$

$t_0 \in \mathbb{R}$ $\quad u_0 =$ vettore di dati iniziali $\quad u_0 = (u_{01}, \dots, u_{0n})$

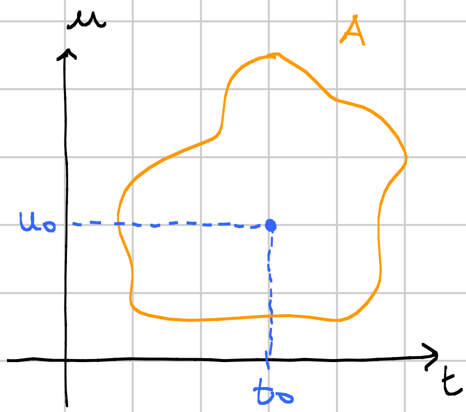
Supponiamo ovviamente $(t_0, u_0) \in A$ e $\boxed{f \text{ continua}}$

Allora il problema ha almeno una <u>soluzione locale</u>, cioè una funzione $u : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ tale che $\quad (u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)))$

- u è di classe C^1 (cioè lo sono le componenti);
- $t_0 \in (a,b)$;
- $(t, u(t)) \in A$ per ogni $t \in (a,b)$
- u risolve l'equazione (cioè il sistema)

— o — o —

Per semplicità lavoriamo nel caso $n = 1$.



$\boxed{\text{Fatto 1}}$ u è una soluzione del problema di Cauchy se e solo se

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds. \qquad (\text{int})$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ <u>Prima parte</u> Supponiamo che u risolva

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Integrando l'equazione in $[t_0, t]$ rispetto alla variabile s, ottengo

$$\int_{t_0}^{t} u'(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds$$

$$\| $$

$$u(t) - u(t_0) = u(t) - u_0$$

Portando u_0 a dx si ha (int)

Secondo parte Supponiamo che u verifichi (int). Allora

- sostituendo $t = t_0$ ottengo $u(t_0) = u_0$ (cond. iniziale)
- derivando a dx e sx rispetto a t ottengo

$$u'(t) = f(t, u(t)),$$

cioè l'equazione.

—o—o—

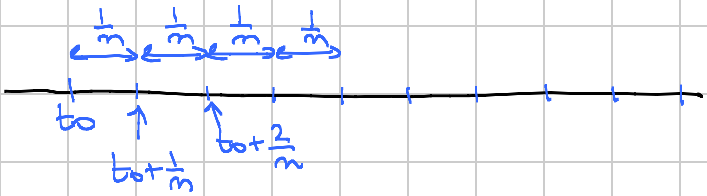
Vantaggi del fatto 1

- equazione e dato iniziale sono contenuti in un'unica relazione
- non compaiono derivate: basta trovare una funzione u CONTINUA che risolve (int) e automaticamente la stessa u sarà C^1 e risolve il problema di Cauchy.

— o — o —

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Come ottenere una soluzione approssimata? Con una DISCRETIZZAZIONE TEMPORALE.



Voglio trovare il valore approssimato della soluzione per $t = t_0 + \frac{k}{n}$

L'idea è di porre u_n = soluzione approssimata data da
$u_n(t_0) = u_0$
In t_0 so che $u_n'(t_0) = f(t_0, u_0)$. Faccio finta che la derivata rimanga la stessa in tutto l'intervallo $[t_0, t_0 + \frac{1}{m}]$

$$u_n\left(t_0 + \frac{1}{m}\right) = \underbrace{u_0}_{\text{valore all'inizio dell'interv.}} + \underbrace{\frac{1}{m}}_{\text{lungh. intervallo}} \underbrace{f(t_0, u_0)}_{\text{valore derivata all'inizio dell'intervallo.}}$$

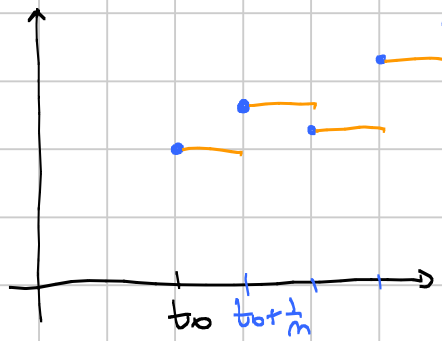
$$u_n\left(t_0 + \frac{2}{m}\right) = u_n\left(t_0 + \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{m} f\left(t_0 + \frac{1}{m}, u_n\left(t_0 + \frac{1}{m}\right)\right)$$

Procedendo in maniera ricorsiva si pone

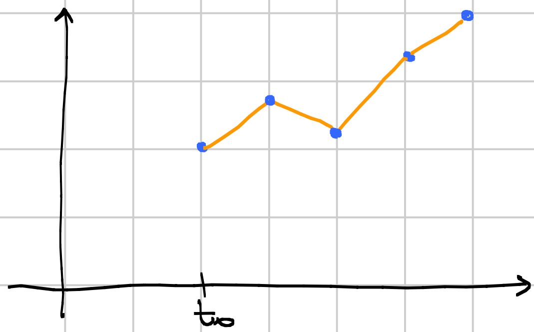
$$u_n\left(t_0+\frac{k+1}{n}\right) = u_n\left(t_0+\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(t_0+\frac{k}{n}, u_n\left(t_0+\frac{k}{n}\right)\right)$$

nuovo valore = vecchio valore + (lungh. step) × derivata nel vecchio valore

Nota tecnica: finora u_n è definita solo nei punti del tipo $t_0+\frac{k}{n}$ con $k \in \mathbb{N}$. Si può estendere a tutti i numeri reali intermedi ponendola costante o affine a tratti:



costante a tratti



affine a tratti

$\boxed{\text{IDEA}}$ Quando $n \to +\infty$, le $u_n(t)$ costruite come sopra tendono (in qualche senso) ad una soluzione del problema di Cauchy (o per lo meno ad una soluzione del pbm. scritto in forma integrale).

$\boxed{\text{Oss.}}$ Visto che il problema può avere più di una soluzione, può accadere che il limite di $u_n(t)$ non esista, ma s.succ. diverse convergano a soluzioni diverse.

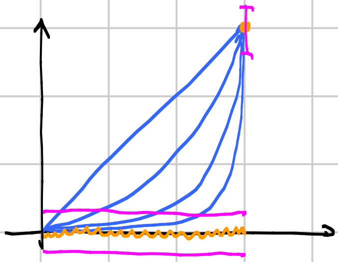
$\boxed{\text{Nota}}$ In che senso una funzione $u_n(t)$ tende ad una funzione $u(t)$?

- Convergenza puntuale: per ogni t fissato, $u_n(t) \to u(t)$ come succ. di numeri
- Convergenza uniforme: per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che $|u(t) - u_n(t)| < \varepsilon$ definitivamente (stesso defin. per ogni t)

<u>Esempio</u> $u_n : [0,1] \to [0,1]$ $\quad u_n(t) = t^n$

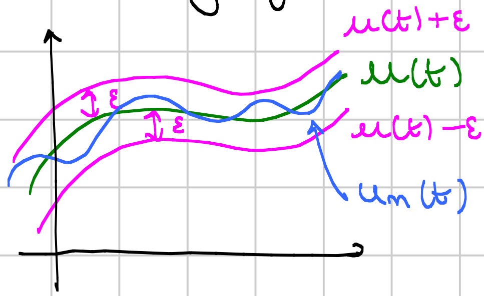
Quando $n \to +\infty$ si ha che

$$u_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \in [0,1) \\ 1 & \text{se } t = 1 \end{cases}$$



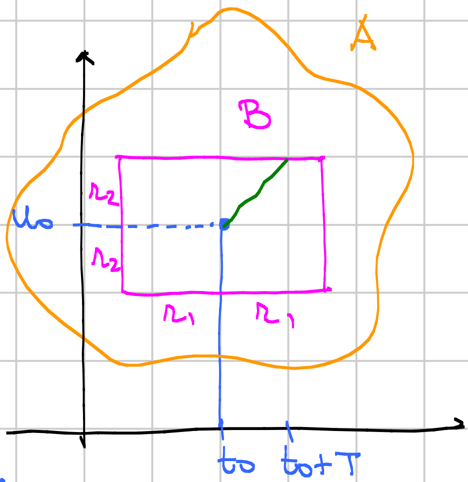
Le $u_n(t)$ tendono puntualmente al limite, ma non uniformemente

Convergenza uniforme vuol dire che il grafico delle $u_n(t)$ sta definitivamente in un intorno del grafico del limite



— o — o —

Siamo sicuri che le $u_n(t)$ costruite sopra siano ben definite? Detto altrimenti: siamo sicuri che non scappano dall'insieme A in cui è definita $f(t,u)$, almeno per t vicino a t_0?



Poichè A è aperto esisterà un rettangolo

$$B = [t_0 - r_1, t_0 + r_1] \times [u_0 - r_2, u_0 + r_2] \subseteq A$$

Sia $M = \max\{ |f(t,u)| : (t,u) \in B \}$

esiste per Weierstrass 2 dimensionale

Finchè u o u_n resta in B, la sua derivata è limitata tra $-M$ ed M. Questo garantisce un tempo minimo di permanenza in B. Questo tempo è

$$T = \min\left\{ r_1, \frac{r_2}{M} \right\}$$

per $t > r_1$ non garantisco di stare in A

se una funzione ha derivata $\pm M$ in questo tempo scappa da A.