SSSUP 2010 — LEZIONE 16

Titolo nota 15/03/2010

Equazioni differenziali

In forma generalissima un' eq. diff. di ordine 1 (derivate prime) si presenta nella forma

$$\Phi\left(t, u(t), u'(t)\right) = 0$$

dove Φ è una funzione di 3 variabili definita in un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^3$.

Una soluzione di un' eq. diff. è una funzione $u: (a,b) \to \mathbb{R}$ che sia derivabile e per cui la relazione di sopra vale $\forall t \in (a,b)$.

Nota bene: (a,b) è tra le incognite del problema.

Esempi $\quad u' = \sin u \qquad u' = \cos u + t \qquad \cos u' = \sin(u + t^2)$

Generalizzazioni:
- $\to$ equazioni in cui compaiono derivate succ.
- $\to$ sistemi con k funzioni incognite e k equazioni (di ordine 1 o superiore)

Esempio
$$\begin{cases} u' = \cos u + v^2 \\ v' = \sin u - v^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} u'' = \cos u + [v']^2 + t^2 \\ v' = \sin u \end{cases}$$

$\boxed{\text{Fatto fondamentale 1}}$ Tutto si può trasformare in un sistema di equazioni del 1° ordine.

Esempio $\quad u''' + [u'']^5 + \arctan(u' \cdot u) = t^6 \quad$ (eq. di ordine 3)

diventa
$$\left.\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= w \quad (\text{moralmente } u'') \\ w' + w^5 &+ \arctan(v \cdot u) = t^6 \end{aligned}\right\} \text{sistema di 3 equazioni in 3 incognite}$$

Conseguenza: se sappiamo risolvere i sistemi del 1° ordine, sappiamo risolvere tutto.

— o — o —

Def. Un' eq. (o più in generale un sistema) del 1° ordine si dice in forma normale se è del tipo

$$\boxed{u' = f(u,t)}$$ derivate = funzione del resto

Oss. La stessa scrittura vale per equazioni e sistemi: basta pensare $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))$ e f con n componenti, ciascuna dipendente da $t, u_1(t), \dots, u_n(t)$.

— o — o —

Problema di CAUCHY

$$u' = f(u,t) \quad \leftarrow \text{eq. diff.}$$
$$u(t_0) = u_0 \quad \leftarrow \text{valore iniziale prescritto}$$

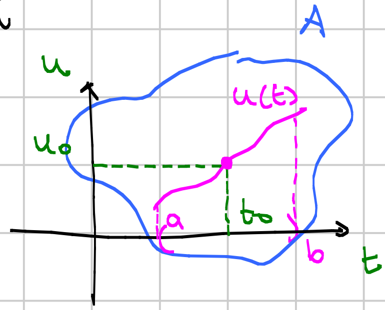
dati

Quando si tratta di sistema, il dato iniziale prescrive il valore di tutte le componenti di u per uno stesso tempo iniziale t_0.
Se il sistema arriva da un' eq. di ordine k, allora nel pb. di Cauchy si prescrivono u e tutte le sue prime $k-1$ derivate per uno stesso t_0.

— o — o —

Per semplicità mi limito al caso di equazioni

$$\begin{cases} u' = f(u,t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &f: A \to \mathbb{R} \\ &A \subseteq \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$



— o — o —

Altri tipi di problemi

$$u'' = f(t,u,u') \quad \text{eq. diff. 2° ordine}$$
$$u(a) = \dots$$
$$u(b) = \dots$$

Problema di DIRICHLET: dare u per 2 valori diversi a e b

$$u'' = f(t,u,u')$$
$$u'(a) = \dots$$
$$u'(b) = \dots$$

Problema NEUMANN

— o — o —

Teorema di esistenza Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto, sia $f: A \to \mathbb{R}$ $\boxed{\text{CONTINUA}}$, sia $(t_0, u_0) \in A$.

Allora il problema di Cauchy $u' = f(u,t)$ $u(t_0) = u_0$ ha $\boxed{\text{ALMENO}}$ una soluzione.

Teorema di esistenza e unicità Sia tutto come sopra. Supponiamo che f sia Lipschitziana in u uniformemente rispetto a t, cioè che $\exists\, L$ t.c.

$$|f(t,u_1) - f(t,u_2)| \leq L\, |u_1 - u_2|$$

la costante è la stessa per ogni t

per ogni t, u_1, u_2 tali che $(t,u_1) \in A$ e $(t,u_2) \in A$.
Allora la soluzione (che già esiste per il teo. precedente) è anche UNICA.

—o—o—

$\boxed{\text{Oss. importante}}$ Quando f è C^1 (derivabile con derivate continue rispetto ad u e t), allora automaticamente è Lipschiana almeno localmente (cioè a patto di restringere A). Solito Lagrange.

—o—o—

Esempi $u' = 2\sqrt{|u|}$ equazione autonoma

$f(t,u) = \sqrt{|u|}$ definita su $A = \mathbb{R}^2$.

È facile vedere che $f(t,u)$ non è Lipschitziana su tutto $\mathbb{R}^2$ (ci sono problemi vicino $u=0$). Consideriamo il pb. di Cauchy

$$\begin{cases} u' = 2\sqrt{|u|} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

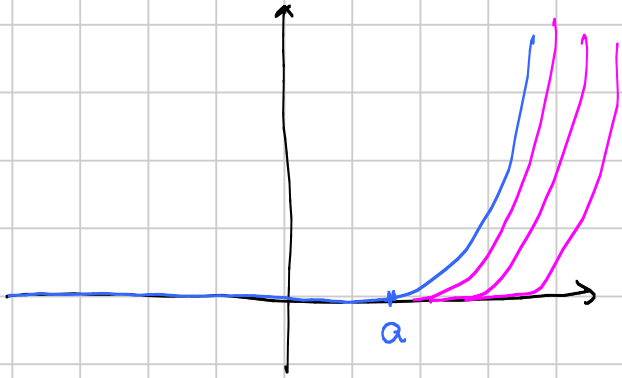
Una soluzione è $u(t) \equiv 0$
Un'altra soluzione è "quasi" $u(t) = t^2$
(il quasi è per colpa dei t negativi)

Una vera altra soluzione è

$$u(t) = \begin{cases} t^2 & \text{per } t \geq 0 \\ -t^2 & \text{per } t \leq 0 \end{cases}$$

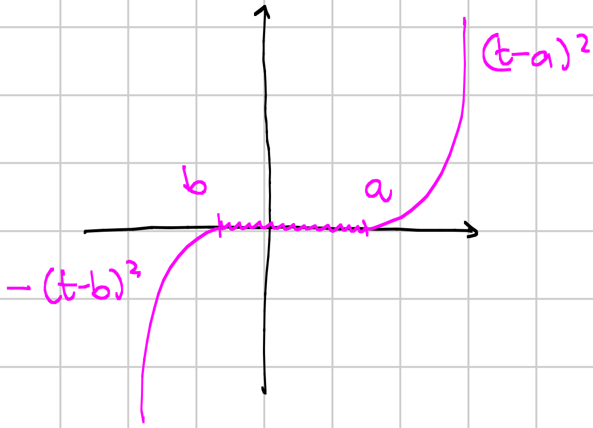
Nell' esempio manca la Lip., e infatti ci sono almeno 2 soluz. In realtà ce ne sono infinite, date ad esempio dalla formula

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \le a \\ (t-a)^2 & \text{per } t \ge a \end{cases}$$



Si verifica direttamente nei 2 tratti che si tratta di una soluzione, qualunque sia il valore di a.

Volendo, potrei anche fare una famiglia a 2 parametri



$\boxed{\text{FATTO GENERALE 1}}$ Tutte le volte che ci sono 2 soluzioni, ce ne sono infinite che riempono la zona fra i 2 grafici (pennello di PEANO)

$\boxed{\text{FATTO GENERALE 2}}$ Data un' eq. diff. autonoma, e data una sua soluzione $u(t)$, allora tutte le sue traslate orizzontali sono soluzioni della stessa equazione $u(t) \rightsquigarrow u(t+\alpha)$

Dim. u soluzione vuol dire $u'(t) = f(u(t))$

quindi anche $u'(t+\alpha) = f(u(t+\alpha))$ $\square$

—o—o—

Esempio Risolvere il pb. di Cauchy $\begin{cases} u' = \log u \\ u(0) = 1 \end{cases}$

La soluzione del problema è $u(t) \equiv 1$ (si vede per sostituzione) ed è unica perché $\log u$ è Lipschitziana in un intorno del valore $y_0 = 1$. Posso pensare $A =$ rettangolino intorno al p.to $(0, 1)$