

Valori soglia per successioni per ricorrenza

Esempio 1 $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n}$ $x_1 = \alpha > 0$ (stessa cosa per $x_{n+1} = n x_n^2$)

Notazione: indichiamo con $x_n(\alpha)$ l' n -esimo termine ottenuto partendo da α

$\uparrow$ dato iniziale.

Proprietà di $x_n(\alpha)$ come funzione di α :

① $x_n(\alpha)$ è una funzione continua di α .

Si dimostra banalmente per induzione

$$x_1(\alpha) = \alpha \text{ più continua di così... } x_2(\alpha) = \frac{\alpha^2}{1}, \quad x_3(\alpha) = \frac{\alpha^4}{2}, \dots$$

$$x_{n+1}(\alpha) = \frac{x_n^2(\alpha)}{n} \leftarrow \text{funzione continua}$$

② $x_n(\alpha)$ è una funzione strettamente crescente di α (per $\alpha \geq 0$)

Anche questo si dimostra banalmente per induzione.

Siano infatti $\beta > \alpha \geq 0$. Allora banalmente $x_1(\beta) > x_1(\alpha)$.

Supponiamo ora per Hp induttiva che $x_n(\beta) > x_n(\alpha)$. Allora

$$x_{n+1}(\beta) = \frac{[x_n(\beta)]^2}{n} > \frac{[x_n(\alpha)]^2}{n} = x_{n+1}(\alpha) \quad (\text{tesi induttiva})$$

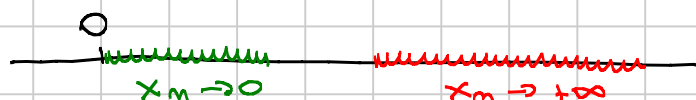
$\uparrow$
Uso Hp
— o — o —

FATTO 1 $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $x_n(\alpha) \rightarrow +\infty$ (basta $\alpha = 2$)

Grazie alla stretta monotonia, lo stesso vale $\forall \beta \geq \alpha$.

FATTO 2 $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ ($\alpha > 0$) t.c. $x_n(\alpha) \rightarrow 0$ (basta $\alpha = 1$)

Grazie alla stretta monotonia, idem $\forall \beta \in [0, \alpha]$



FATTO 3 Supponiamo che per un certo $\alpha > 0$ e un certo $m_0 \in \mathbb{N}$ si abbia

$$x_{m_0+1}(\alpha) < x_{m_0}(\alpha)$$

Allora per lo stesso α si ha che $x_{m+1}(\alpha) < x_m(\alpha) \forall m \geq m_0$ (cioè da lì in poi decresce)

Dim. induzione su n .

Passo base: $n = m_0$ (che abbiamo assunto)

$n \Rightarrow n+1$ Supponiamo che $x_{m+1}(\alpha) < x_m(\alpha)$ per un certo $m \geq m_0$. Allora

$$x_{m+2}(\alpha) = \frac{[x_{m+1}(\alpha)]^2}{m+1} < \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Uso Hp}}}{\frac{[x_m(\alpha)]^2}{m+1}} < \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Pecorso}}}{\frac{[x_m(\alpha)]^2}{m}} = x_{m+1}(\alpha)$$

Oss. L'analogo del fatto 3 non vale con il $>$.

FATTO 4 L'insieme degli $\alpha > 0$ per cui $x_n(\alpha) \rightarrow 0$ (la zona verde) è un APERTO, cioè se per un certo $\alpha > 0$ la succ. tende a zero, allora lo stesso vale per ogni α abbastanza vicini.

Dim. Supponiamo che per un certo $\bar{\alpha} > 0$ si abbia $x_n(\bar{\alpha}) \rightarrow 0$. Allora $x_n(\bar{\alpha})$ non può essere debolmente crescente, ma allora $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$x_{m_0+1}(\bar{\alpha}) < x_{m_0}(\bar{\alpha})$$

Ma le funzioni a δx e dx sono continue come funzioni di α , dunque la stessa relazione deve valere per ogni α ϵ intorno di $\bar{\alpha}$ (solita permanenza del segno). Quindi per ogni α ϵ intorno di $\bar{\alpha}$ si ha che $x_n(\alpha)$ è strett. decrescente da m_0 in poi. Una volta che $x_n(\alpha)$ è definitivamente decrescente, è banale dimostrare che $x_n(\alpha) \rightarrow 0$.

FATTO 5 Sia β_0 il sup della zona verde. Cosa accade partendo da β_0 ?

- Non può accadere che $x_n(\beta_0) \rightarrow 0$ (per il fatto 4)
- Non può accadere che $x_n(\beta)$ "torni indietro" per qualche valore di n , quindi $x_n(\beta)$ è debolmente crescente (fatti 3+4).

Di conseguenza $x_n(\beta_0)$ è debolmente crescente, dunque per i teoremi sulle succ. monotone si ha che

$$x_n(\beta_0) \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Se fosse $l \in \mathbb{R}$ avrei

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & \frac{x_n^2}{n} \rightarrow \frac{l^2}{+\infty} \\ \downarrow & & \downarrow \\ l & = & 0 \end{array}$$

da cui $l=0$, che è impossibile.

Quindi $x_n(\beta_0) \rightarrow +\infty$.

Quindi

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \sup \{ \alpha \geq 0 : x_n(\alpha) \rightarrow 0 \} \\ &= \inf \{ \alpha \geq 0 : x_n(\alpha) \rightarrow +\infty \} \\ &= \min \quad \quad \quad \neg \end{aligned}$$

(β_0 è in zona rossa).
— 0 — 0 —

Oss. Euristicamente si può capire chi è β_0

$$x_1 = \alpha, \quad x_2 = \alpha^2, \quad x_3 = \frac{\alpha^4}{2}, \quad x_4 = \frac{\alpha^8}{2^2 \cdot 3}, \quad x_5 = \frac{\alpha^{16}}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 4}, \quad x_6 = \frac{\alpha^{32}}{2^8 \cdot 3^4 \cdot 4^2 \cdot 5}$$

Congettura,

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{\alpha^{2^{n-1}}}{2^{2^{n-3}} \cdot 3^{2^{n-4}} \cdot 4^{2^{n-5}} \cdot \dots \cdot (n-1)^{2^0}} \\ &= \frac{\alpha^{2^{n-1}}}{\prod_{i=0}^{n-3} (n-1-i)^{2^i}} \end{aligned}$$

(si dimostra per induzione)

È ragionevole pensare che la soglia si abbia quando $\text{num} \sim \text{den}$.

cioè

$$\alpha^{2^{n-1}} \sim 2^{2^{n-3}} \cdot 3^{2^{n-4}} \cdot 4^{\dots}$$

Faccio i logaritmi: $2^{n-1} \log \alpha \sim 2^{n-3} \log 2 + 2^{n-4} \log 3 + \dots$

Divido per 2^{n-1} e ottengo

$$\log \alpha \sim \frac{1}{4} \log 2 + \frac{1}{8} \log 3 + \frac{1}{16} \log 4 + \frac{1}{32} \log 5 + \dots$$

$$\sim \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log k}{2^k} \quad (\text{serie convergente})$$

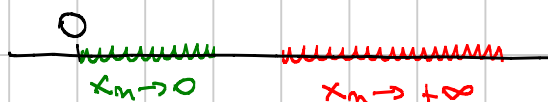
Congettura: $\log(\beta_0) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log k}{2^k}$.

Non dovrebbe essere difficile dimostrarlo.

Esempio $x_{n+1} = x_n \left(x_n + \frac{1}{n}\right)$ $x_1 = \alpha > 0$.

$x_n(\alpha)$ è come prima una funzione continua e strettamente crescente di α

FATTO 1 e 2 Come prima



FATTO 3 Se $x_{m_0+1}(\alpha) < x_{m_0}(\alpha)$, allora $x_{n+1}(\alpha) < x_n(\alpha)$ per ogni $n \geq m_0$

FATTO 4 Come prima, la zona verde è aperta

FATTO 5 Se $x_{m_0}(\alpha) > 1$, allora di sicuro $x_n(\alpha) \rightarrow +\infty$

FATTO 6 Se $x_{m_0}(\bar{\alpha}) > 1$ per un certo $\bar{\alpha}$, allora $x_{m_0}(\alpha) > 1$ per α in opportuno intorno di $\bar{\alpha}$.
Quindi la zona rossa è aperta

FATTO 7

Sia ora β_0 un qualunque elemento che non sta né nella rossa, né nella verde (ad esempio il sup della verde o l'inf. della rossa).

Cosa sappiamo di $x_n(\beta_0)$?

- Non può tendere a 0
- " " " " $+\infty$
- Non può mai tornare indietro, quindi $x_n(\beta_0)$ è debolmente crescente (e volendo anche ≤ 1), quindi $x_n(\beta_0) \rightarrow l \in \mathbb{R}$ e l'unico disponibile è $l = 1$.

FATTO 8

Supponiamo che esistano $\beta_1 < \beta_2$ b.c.

$$x_n(\beta_1) \rightarrow 1 \text{ e } x_n(\beta_2) \rightarrow 1$$

Voglio dire che definitivamente $x_n(\beta_2) - x_n(\beta_1)$ è (debolmente, ma anche strettamente) crescente. Questo impedisce alla differenza di tendere a 0.

Pongo $d_n = x_n(\beta_2) - x_n(\beta_1) > 0 \quad \forall n \geq 1$ per proprietà dette sopra.

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= x_{n+1}(\beta_2) - x_{n+1}(\beta_1) \\ &= [x_n(\beta_2)]^2 + \frac{1}{n} x_n(\beta_2) - [x_n(\beta_1)]^2 - \frac{1}{n} x_n(\beta_1) \\ &= (x_n(\beta_2) + x_n(\beta_1))(x_n(\beta_2) - x_n(\beta_1)) + \frac{1}{n} (x_n(\beta_2) - x_n(\beta_1)) \\ &= \underbrace{[x_n(\beta_2) - x_n(\beta_1)]}_{d_n} \cdot \underbrace{\left[x_n(\beta_2) + x_n(\beta_1) + \frac{1}{n} \right]}_{\text{Questo tende a 2, quindi definitivamente supera 1}} \end{aligned}$$

Quindi definitivamente si ha che $d_{n+1} > d_n$, dunque d_n non tende a zero.

— 0 — 0 —