

Esempio 1 $x_1 = 1$ $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n}$

Idea: $x_n \rightarrow 0$.

PIANO (i) $0 \leq x_n \leq 1 \quad \forall n \geq 1$ (inclusione banale)
 (ii) $x_n \rightarrow 0$ (carabinieri)

Esempio 2 $x_1 = 2$ $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n}$

PIANO (i) $0 \leq x_n \leq 10.000 \quad \forall n \geq 1$ ← non riesce.
 (ii) $x_n \rightarrow 0$ (carabinieri)

Dim (i) $x_n \geq 0$ banale. $x_n \leq 10.000 \dots$ passaggio induttivo...

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n} \leq \frac{10^8}{n} \leq 10.000$$

↑
spero: tende a 0, quindi definitivamente è vera !!!

PIANO BIS (i) ---
 (ii) $x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \geq 1$
 (iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (banale dal (ii))
 (iv) $l = +\infty$ (se fosse $l \in \mathbb{R}$, passo al limite la ricorrenza e ottengo $l=0$, che spero non compatibile con (i))

Provo a dim (ii) Devo dim. $\frac{x_n^2}{n} \geq x_n$, cioè semplificando

(perché posso?) $\frac{x_n}{n} \geq 1$, cioè $x_n \geq n$, ma se già sapessi questo non avrei bisogno di altro!

Uno vorrebbe $x_n \geq n$ al p.to (i), ma questo per inclusione non viene !!!

PIANO TER

$$(i) x_n \geq 2^n \quad \forall n \geq 1$$

$$(ii) x_n \rightarrow +\infty$$

(Basterebbe da (i))

Dim (i) Induzione ... passaggio induttivo ...

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n} \geq \frac{2^{2n}}{n} \geq 2^{n+1}$$

$\uparrow$
spero

La speranza è $2^{2n} \geq n \cdot 2^{n+1}$, cioè $2^{n-1} \geq n$, ma questo è una facile induzione a sua volta.

— 0 — 0 —

Oss. Non si riusciva a dim. che $x_n \geq n$, si riesce invece a dim. che $x_n \geq 2^n$.

Esercizio: provare cosa sarebbe successo con $x_n \geq n^2$

— 0 — 0 —

Oss. generale $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n} \quad x_1 = \alpha > 0$

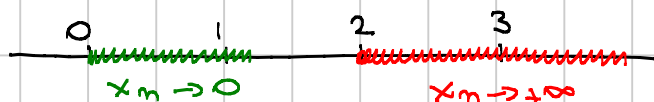
C'è uno spartiacque, cioè un valore $\alpha_0 > 0$ t.c.

- se $\alpha > \alpha_0$, allora $x_n \rightarrow +\infty$
- se $\alpha < \alpha_0$, allora $x_n \rightarrow 0$
- se $\alpha = \alpha_0$, di solito son dolori!

I p.ti fondamentali della dim. sono i seguenti

- [1] Se per un certo α si ha che $x_n \rightarrow +\infty$, allora la stessa cosa succede per tutti gli α successivi. (idea: chiamo x_n la succ. con il primo α , y_n la succ. con l' α + grande, e dim. per induzione che $x_n \leq y_n \quad \forall n \geq 1$)

- [2] Se per un certo α si ha $x_n \rightarrow 0$, allora idem per i precedenti



[3] Pongo $\beta_0 = \sup$ zona verde
 $\gamma_0 = \inf$ zona rossa

Speranza: $\beta_0 = \gamma_0$ e riuscire a stabilire cosa succede per quel valore.

Provare per esercizio !!!

— 0 — 0 —

Esempio 3 $x_1 = \alpha > 0$ $x_{n+1} = x_n \left(x_n + \frac{1}{n} \right)$

Euristica: quali sono i possibili limiti? ... $L = L^2$
cioè $L = 0, 1$ (ovviamente anche $+\infty$ e N.E.)

Domanda 1 $\exists \alpha$ t.c. $x_n \rightarrow +\infty$? Sì: basta prendere $\alpha = 2$

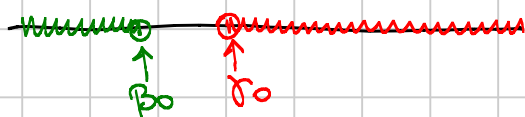
Basta dim. per induzione che $x_n \geq 2^n$ in questo caso

(N.B. $x_{n+1} \geq x_n^2$)

Fatto 2 Se per un certo α si ha che $x_n \rightarrow +\infty$, allora
idem per i successivi

Fatto 3 $\exists \alpha > 0$ t.c. $x_n \rightarrow 0$. Partiamo con $\alpha = \frac{1}{10}$.
Non dovrebbe essere difficile dimostrare che
 $x_n \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall n \geq 1$, da cui $x_n \rightarrow 0$.

Fatto 4 Se per un certo α si ha che $x_n \rightarrow 0$, allora
idem per i precedenti



Idea: $\beta_0 = \gamma_0$ e per quel valore $x_n \rightarrow 1$

Prendiamo α_0 . Cosa può fare x_n partendo da α_0 ?

Non può tendere a $+\infty$, e anzi non può nemmeno superare 1.
Infatti: appena la successione supera 1, è obbligata a tendere a $+\infty$ (infatti $x_{n+1} \geq x_n^2$)

Oss. fondamentale: se per un certo valore di α e di $n_0 \in \mathbb{N}$ si ha che $x_{n_0} > 1$, allora anche per α vicini si avrà che $x_{n_0} > 1$. Infatti x_{n_0} è una funzione continua di α .
Quindi se per α_0 supera 1, allora lo supera anche per valori $\alpha < \alpha_0$, dunque α_0 non è l'inf.

Analogamente: cosa può fare x_n partendo da β_0 ?

Non può tendere a $+\infty$.

— 0 —

Come escludere che x_n vada a 0 partendo da α_0 o β_0 ?

Se $x_n \rightarrow 0$, allora $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $x_{n_0+1} < x_{n_0}$

Se $x_{n+1} < x_n \leq 1$ per un certo n , allora x_n è monotona decrescente da quel p.to in poi

(banale induzione: $x_{n+1} < x_n \leq 1 \Rightarrow x_{n+2} < x_{n+1} \leq 1$)

Se è definitivamente monotona, allora ha limite, ed il limite a quel p.to è 0 (non può tendere a 1 dall'alto!!)

Ora se $x_{n_0+1} < x_{n_0}$ per un certo α , allora si ha la stessa relazione per tutti gli α vicini, dunque se per un certo α si ha $x_n \rightarrow 0$, allora per tutti gli α vicini si ha che $x_n \rightarrow 0$.

— 0 —

Cosa può fare x_n per $\beta_0 \leq \alpha \leq \alpha_0$? Non può superare 1, non può decrescere (nemmeno per un solo valore di n). Non le resta che essere debolmente crescente, dunque avere limite

che non può essere 0 o $+\infty$, dunque per forza 1 .

Resterebbe solo da dimostrare che $\beta_0 = \sigma_0$, ma per questo basta osservare che nei casi in cui è monotona crescente si ha sempre che due succ. con partenza diversa tendono ad allontanarsi.

$$\begin{array}{ll} x_1 = \beta_0 & x_{n+1} = \dots \\ y_1 = \sigma_0 & y_{n+1} = \dots \end{array} \Rightarrow y_n - x_n \geq \sigma_0 - \beta_0$$

— 0 — 0 —

Esercizi ① È unica la soglia per $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n}$?

② cosa succede con partenza sulla soglia?

③ $x_{n+1} = \frac{n x_n}{1 + x_n^2}$ $x_1 = d > 0$

come si comporta ?