

SSSUP 2010 - LEZIONE 13

Titolo nota

11/03/2010

Hôpital per successioni (∞/∞).

Supponiamo $a_n \rightarrow +\infty$

$b_n \rightarrow +\infty$

b_n strett. crescente

Allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ se quest'ultimo esiste in $\bar{\mathbb{R}}$

In generale succederà che

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

Dim. Dimostro la disug. + a dx. Intanto posso supporre che

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L \in \mathbb{R} \quad (\text{se } L = +\infty \text{ è banale, se } L = -\infty \text{ la dim. è analoga}).$$

Fisso $\varepsilon > 0$.

Allora $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq m_0$ si abbia

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \leq L + \varepsilon, \text{ da cui } a_{n+1} - a_n \leq (L + \varepsilon)(b_{n+1} - b_n)$$

$\uparrow$
Ho usato la stretta
crescenza di b_n .

$\forall n \geq m_0$.

Allora

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_{n+1} - a_{m_0} + a_{m_0} = a_{m_0} + \sum_{i=m_0}^n (a_{i+1} - a_i) \\ &\leq a_{m_0} + \sum_{i=m_0}^n (L + \varepsilon)(b_{i+1} - b_i) \\ &= a_{m_0} + (L + \varepsilon)(b_{n+1} - b_{m_0}) \end{aligned}$$

Ma allora

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_{n_0} + (L+\varepsilon)(b_{n+1}-b_{n_0})}{b_{n+1}-b_{n_0}+b_{n_0}} =$$

$$= \frac{\cancel{b_{n+1}-b_{n_0}}}{\cancel{b_{n+1}-b_{n_0}}} \frac{\boxed{\frac{a_{n_0}}{b_{n+1}-b_{n_0}}} + (L+\varepsilon)}{1 + \boxed{\frac{b_{n_0}}{b_{n+1}-b_{n_0}}}} \rightarrow 0$$

Ho usato che
 $b_n \rightarrow +\infty$

Passando al limsup, abbiamo che

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{---}{---} = L + \varepsilon$$

Poichè la relazione vale $\forall \varepsilon > 0$, varrà anche con $\varepsilon = 0$.

Oss. In realtà non si è usato che $a_n \rightarrow +\infty$, ma solo che
 $b_n \rightarrow +\infty$ e b_n strett. cresc.

Hôpital per successioni 0/0

Supponiamo $a_n \rightarrow 0$

$b_n \rightarrow 0$ e b_n strett. decr. (in part. $b_n \rightarrow 0^+$)

Allora si ha la stessa tesi del caso precedente.

Dim. Supponiamo $L = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}} \in \mathbb{R}$

Fisso $\varepsilon > 0$. Allora $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq n_0$ si ha che

$$\frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} \leq L + \varepsilon, \text{ da cui } a_n - a_{n+1} \leq (L + \varepsilon)(b_n - b_{n+1})$$

$$a_n = a_n - \underbrace{a_{n+1} + a_{n+1} - a_{n+2}} + \underbrace{a_{n+2} - a_{n+3}} + \dots + a_k$$

$$= \sum_{i=n}^{k-1} (a_i - a_{i+1}) + a_k$$

$$\leq (L + \varepsilon) \sum_{i=n}^{k-1} (b_i - b_{i+1}) + a_k$$

$$= (L + \varepsilon)(b_n - b_k) + a_k \quad (\text{questo se } k \geq n \geq n_0)$$

Ma allora

$$\frac{a_n}{b_n} \leq \frac{(L+\varepsilon)(b_n - b_k) + a_k}{b_n - b_k + b_k} = \frac{\cancel{(b_n - b_k)}}{\cancel{(b_n - b_k)}} \frac{L+\varepsilon + \boxed{\frac{a_k}{b_n - b_k}}}{1 + \boxed{\frac{b_k}{b_n - b_k}}} \rightarrow \frac{0}{b_n} = 0$$

$\frac{0}{b_n} = 0$

Questa disuguaglianza vale $\forall n$ e $\forall k$ con $k \geq n \geq n_0$.
Ora tengo fisso n e faccio il limite per $k \rightarrow +\infty$. Ottengo

$$\frac{a_n}{b_n} \leq L + \varepsilon \text{ la quale è vera } \forall n \geq n_0$$

Non resta ora che fare il $\limsup_{n \rightarrow +\infty}$ e poi mandare $\varepsilon \rightarrow 0$.

Oss. Abbiamo usato tutte le ipotesi ($a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$, $b_n \searrow$)

Esercizio: rifare le 2 dimostrazioni in versione liminf.

SUCCESIONI PER RICORRENZA NON AUTONOME

Esempio 1 $x_1 = 2010$, $x_{n+1} = \sqrt[n]{x_n + 2}$

Idea: $x_n \rightarrow 1$ decrescendo.

(Esercizio: provare a vedere cosa succede impostando la monotonia)

PIANO (i) $1 \leq x_n \leq 3000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(ii) $x_n \rightarrow 1$

Dim (i) Banale induzione (occhio che $x_2 = 2012$)

Dim (ii) Banale ~~to~~. carabinieri. Infatti dal p.to (i) si ha

$$\boxed{1} \leq \boxed{x_{n+1}} \leq \boxed{\sqrt[n]{3002}}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $1 \quad 1 \quad 1$

Oss.: se $x_{n+1} \rightarrow 1$, allora anche $x_n \rightarrow 1$.

Esempio 2 $X_1 = 2010$

$$x_{m+1} = \frac{x_n + 4 + \sin x_n}{\sqrt{n} + \arctan(n x_n)}$$

Idea: è quasi come fosse $x_{n+1} = \frac{x_n + 4}{\sqrt{n}}$

PIANO: (i) $0 \leq x_m \leq 3000 \quad \forall m \geq 1$

(ii) $x_3 \rightarrow 0$

Dim (i) $x_n \geq 0$ è banale induzione

$x_m \leq 3000$ si fa pure per induzione

$n = 1$ base case $n \Rightarrow n+1$

$$x_{n+1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4n}}{2} \leq \frac{3000 + 4 + 1}{\sqrt{n}} \leq 3000$$

↑
vero appena $n \geq 2$

Questo ci dice che il caso $m=2$ va controllato come passo base (all'inizio)!

Dim (ii) Carabinieri: dal p.to (i) si sa che

$$0 \leq x_{n+1} \leq \frac{3005}{\sqrt{n}}$$

Esempio 3 $X_1 = 2010$ $X_{n+1} = \frac{X_n + n}{3X_n + 5n}$

Euristica: supponiamo $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$. Allora passando la
ricorrenza al limite

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 3}{3x_n + 5}$$

L'unico limite reale possibile è $2 = \frac{1}{5}$. Sono possibili anche $+\infty$, $-\infty$, N.E.

PIANO : (i) $0 \leq x_m \leq 10.000$

(ii) $x_m \rightarrow \frac{1}{5}$

Dim (i) $x_m \geq 0$ banale induzione

$x_m \leq 10.000$... prova passaggio induttivo ...

$$x_{m+1} = \frac{x_m + m}{3x_m + 5m} \leq \frac{10.000 + m}{5m}$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{2000}{m}$$

$$\leq \frac{1}{5} + 2000$$

$$\leq 10.000$$

[Da non dire ni pensare:
questo $\rightarrow \frac{1}{5}$, quindi defm-
è ≤ 10.000]

"DEFINITIVAMENTE" E

"INDUZIONE" NON VANNO
D'ACCORDO.

Dim (ii) Carabinieri. Come sopra dal pto (i) deduco

$$\boxed{\frac{m}{30.000 + 5m}} \leq \boxed{x_{m+1}} \leq \boxed{\frac{1}{5} + \frac{2000}{m}}$$

$\downarrow \frac{1}{5}$ $\downarrow \frac{1}{5}$ $\downarrow \frac{1}{5}$