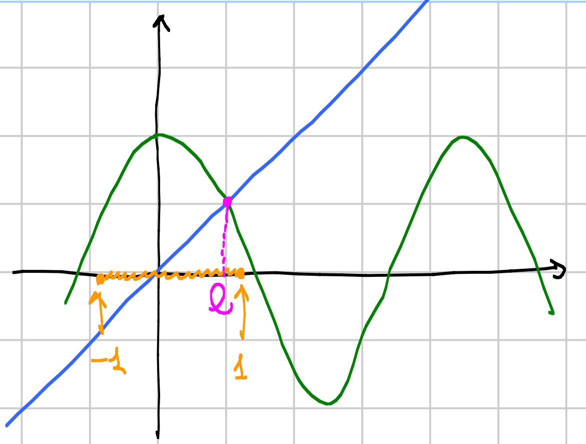
SSSUP 2010 – LEZIONE 12

Titolo nota 01/03/2010

<u>Esempio 1</u> $x_{n+1} = \cos x_n$ $\quad x_0 = 2010$



Prima cosa: l'eq. $x = \cos x$ ha un'unica soluzione $\ell \in \mathbb{R}$.
Basta dimostrare che $f(x) = x - \cos x$ è strettamente monotona (e tende a $\pm\infty$ quando $x \to \pm\infty$).
$f'(x) = 1 + \sin x \geq 0$ e $f'(x) = 0$ "sporadicamente", cioè $f'(x)$ non si annulla in un intero intervallo.

<u>Oss.</u> $f'(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ strett. cresc.
$f'(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ debolm. cresc. Se $f(x)$ non fosse strett. cresc., allora ci sarebbe un tratto piatto, dunque un intervallo con $f'(x) = 0$.

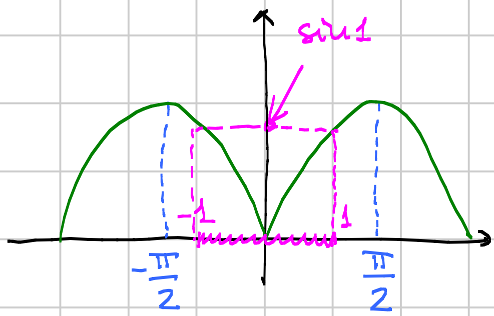
Provo a studiare x_n con la distanza di ℓ: ...

... $d_{n+1} = \ldots = |f'(\xi)| \cdot d_n = |\sin \xi| \cdot d_n \underset{c=1}{\leq} d_n$ GUAIO!!

Invece di $c = 1$ vorrei una costante $c < 1$. È possibile perchè
(i) $-1 \leq x_n \leq 1$ $\boxed{\forall n \geq 1}$ (banalità)
Ora nel p.to (ii) abbiamo

$$d_{n+1} = |\sin \xi| \cdot d_n \leq c\, d_n, \text{ dove}$$

$$c = \max\{|\sin x| : x \in [-1,1]\} = \sin 1 < 1.$$

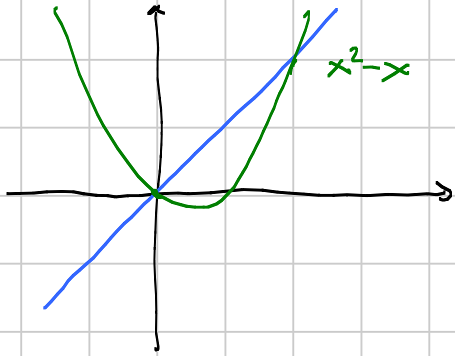


Questo basta per concludere che $x_n \to \ell$ e anzi

$$d_n \leq (\sin 1)^n \cdot d_0$$ → stima dell'errore.

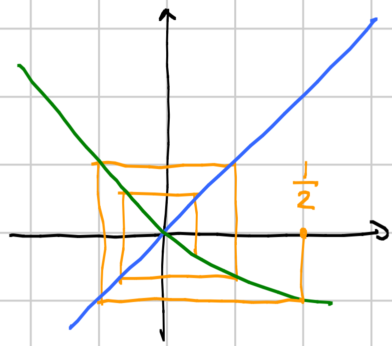
Esempio 2 $\quad x_{n+1} = -x_n + x_n^2$

$x_0 = \frac{1}{2}$



Guardo $f'(0)$: $\quad f'(x) = -1+2x$

$f'(0) = -1 \quad$ GUAIO



Il piano con la distanza NON può funzionare, perchè

$\max\{|f'(x)| : x \in \text{intorno di } 0\}$
$\geq |f'(0)| = 1.$

Resta il piano con le 2 sottosuccessioni

$x_0 = \frac{1}{2}, \quad x_1 = -\frac{1}{4}, \quad x_2 = +\frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$, quindi

$0 \leq x_2 \leq x_0 \quad$ Applico f e ottengo

$0 \geq x_3 \geq x_1 \quad$ " $\quad$ "

$0 \leq x_4 \leq x_2 \quad$ e così via

Il piano con le 2 successioni funziona permettendo di dim. che $x_n \to 0$. Occhio: serve poter applicare $f(x)$ invertendo i versi, cosa che è possibile solo nella zona in cui $f(x)$ è decrescente, cioè per $x \leq \frac{1}{2}$ (vertice). Questa va dimostrata prima di tutto.

Se invece di partire da $x = \frac{1}{2}$ si parte da $x = \frac{3}{4}$, si ricade nel caso precedente dopo un passaggio.

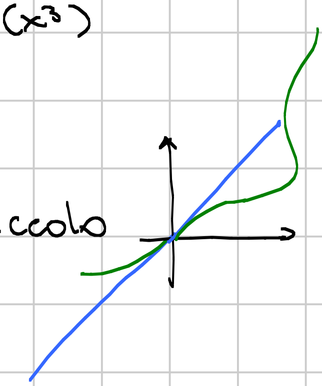
— o — o —

Se fosse stato $x_{n+1} = -\arctan x_n$. Ancora una volta $f(0) = 0$ e $f'(0) = -1 \Rightarrow$ niente distanza.

Tutto dipende da come è messo x_2 rispetto ad x_0 (da lì in poi "applico $f(x)$" ed il comportamento si ripete). Quindi tutto dipende da come è messa $f(f(x))$ rispetto ad x.

Supponiamo $f(x) = -x + ax^2 + bx^3 + o(x^3)$. Allora

$$
\begin{aligned}
f(f(x)) &= -f(x) + a f^2(x) + b f^3(x) + o(f^3(x)) \\
&= x - \cancel{ax^2} - bx^3 + a[\cancel{x^2} - 2ax^3] - bx^3 + o(x^3) \\
&= x - (2b + 2a^2)x^3 + o(x^3)
\end{aligned}
$$



Quindi tutto dipende da $b + a^2$

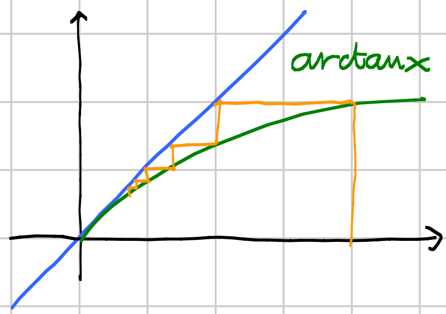
- Se $b + a^2 > 0$, allora $f(f(x)) < x$ per $x > 0$ piccolo e viceversa sui negativi. Quindi partendo vicini a zero ci sarà spiraleggiamento entrante
- Se $b + a^2 < 0$, allora tutto è al contrario.
- Se $b + a^2 = 0$, allora boh nel senso che entrano in gioco i termini successivi.

Quindi: quando f' è "border line" entrano in gioco f'' e f'''.

—o—o—

Torniamo a $x_{n+1} = \arctan x_n$ $\quad x_0 = 2010$ (o qualunque > 0)

$x_n \to 0$ (facile).



Come stimare l'errore?

Si può ad esempio dimostrare per induzione che $x_n \geq \frac{1}{n}$ (stima dal basso)

(provare per esercizio)

Forse si può anche dimostrare che $x_n \leq \frac{2010}{\sqrt[4]{n}}$ ← posso sperare solo in potenze con esponenti ≤ 1.

Come capire brutalmente l'andamento?

Ragionamento EURISTICO. Mettiamo che sia una potenza di n

$x_n \sim \frac{c}{n^\alpha}$. Sostituisco nella ricorrenza

$$\frac{c}{(n+1)^\alpha} \sim \arctan \frac{c}{n^\alpha} \sim \frac{c}{n^\alpha} - \frac{1}{3}\frac{c^3}{n^{3\alpha}} + \ldots$$

Taylor: $\arctan x \sim x - \frac{1}{3}x^3$

quindi $\frac{\cancel{c}}{(n+1)^\alpha} \sim \frac{\cancel{c}}{n^\alpha} - \frac{1}{3}\frac{c^{\cancel{3}2}}{n^{3\alpha}}$

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} = (n+1)^{-\alpha} = \left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{-\alpha}$$

$$= \frac{1}{n^\alpha}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha} \sim \frac{1}{n^\alpha}\left(1-\frac{\alpha}{n}\right) = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{\alpha}{n^{\alpha+1}}$$

$(1+x)^\beta \sim 1+\beta x$ Taylor perché $x \to 0$

Brutalmente: $\text{LHS} = \frac{1}{(n+1)^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{\alpha}{n^{\alpha+1}} + \boxed{---}$

potenze di ordine sup.

$$\text{RHS} = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{3}\frac{c^2}{n^{3\alpha}} + --.$$

Uguagliando i secondi termini otteniamo

$\alpha+1 = 3\alpha$, da cui $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\frac{c^2}{3} = \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

Quindi brutalmente $x_n \sim \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{n}}$

Come rendere rigoroso tutto ciò? Dimostrando che

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, x_n = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, oppure $\lim_{n\to+\infty} n\, x_n^2 = \frac{3}{2}$, oppure

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n x_n^2} = \frac{2}{3}$, oppure $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{x_n^2}}{n} = \frac{2}{3}$

$\boxed{\text{Teorema di ....}}$ (Moralmente: Hôpital per successioni)

Devo fare il limite di $\frac{a_n}{b_n}$. Supponiamo che
$a_n \to +\infty$, $b_n \to +\infty$, b_n strett. cresc.
Allora

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$ se quest'ultimo esiste in $\overline{\mathbb{R}}$

—o—o—

Esercizi: 1 – Dimostrare il teorema $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\arctan^2 x} - \frac{1}{x^2}$

2 – Applicarlo nell'esempio