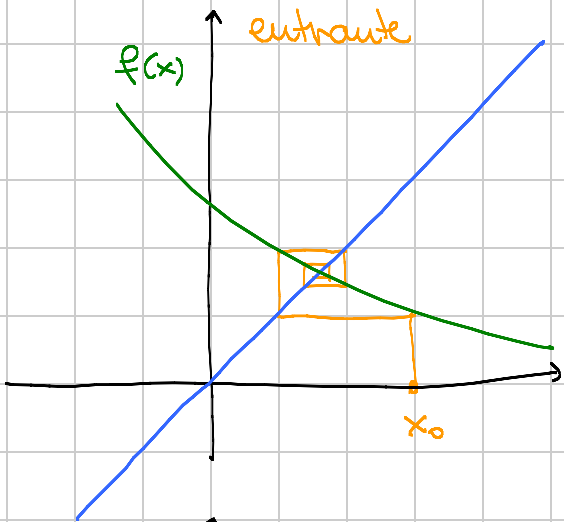
SSSUP 2010 — LEZIONE 11

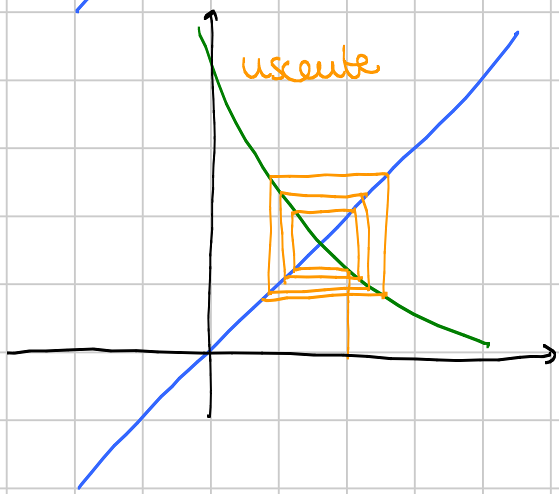
Titolo nota 01/03/2010

Successioni per ricorrenza spiraleggianti

$x_{n+1} = f(x_n)$



Spiraleggiamento $\Leftrightarrow$ decrescenza di $f(x)$ vicino all'intersezione

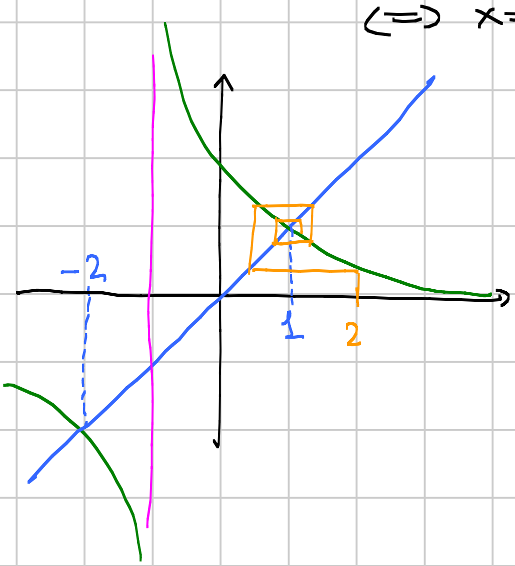


Esempio 1 $\quad x_{n+1} = \dfrac{2}{x_n+1} \qquad x_0 = 2$

$f(x) = \dfrac{2}{x+1} \qquad f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{2}{x+1} = x$

$\Leftrightarrow 2 = x^2 + x$

$\Leftrightarrow x = 1,\ x = -2$



$\boxed{\text{Metodo 1}}$ Due sottosuccessioni

Idea: $x_{2n} \searrow 1$, $x_{2n+1} \nearrow 1$

Piano

(i) $\frac{2}{3} \le x_n \le 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (x_1 \le x_n \le x_0)$

(ii) $x_{2n+2} \le x_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$x_{2n+3} \ge x_{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_{2n} \to \ell \in \mathbb{R}$

$x_{2n+1} \to m \in \mathbb{R}$

(iv) $\ell = m = 1$

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ Si può fare in almeno 2 modi, sostanzialmente x induzione.

$n=0 \ldots$ $\quad \boxed{n \Rightarrow n+1}$ L'ipotesi è $\frac{2}{3} \le x_n \le 2$. Applico $f(x)$ invertendo i versi: $f(\frac{2}{3}) \ge \underset{\substack{\parallel \\ x_{n+1}}}{f(x_n)} \ge f(2)$ da cui la tesi

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Semplice per induzione. $x_0 = 2$, $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{6}{5}$

Allora: $1 \le x_2 \le x_0$ verificato a mano. Applico $f(x)$

$$f(1) \ge f(x_2) \ge f(x_0)$$
$$1 \ge x_3 \ge x_1 \qquad \text{Applico } f(x)$$
$$f(1) \le f(x_3) \le f(x_1)$$
$$1 \le x_4 \le x_2$$

Andando avanti ottengo tutte le disug. che servono.

Più formalmente dovrei dimostrare per induzione l'enunciato

$$\boxed{\begin{array}{l} 1 \le x_{2n+2} \le x_{2n} \\ x_{2n+1} \le x_{2n+3} \le 1 \end{array}}$$

Al passaggio induttivo assumo la coppia per un certo n, e dimostro la coppia per $n+1$ applicando 2 volte $f(x)$

$\boxed{\text{Dim (iii)}}$ Soliti teoremi successioni monotone

$\boxed{\text{Dim. (iv)}}$ Bisogna distinguere pari e dispari. So già che $m, \ell \in \mathbb{R}$

$$x_{2n+1} = \frac{2}{x_{2n}+1} \qquad\qquad x_{2n+2} = \frac{2}{x_{2n+1}+1}$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$m = \frac{2}{\ell+1} \qquad\qquad \ell = \frac{2}{m+1}$$

Invece di una eq. in ℓ, ho un sistema in ℓ, m. Risolvendolo:

$$\begin{cases} m\ell + m = 2 \\ m\ell + \ell = 2 \end{cases} \Rightarrow m = \ell \Rightarrow \ell^2 + \ell = 2 \Rightarrow \ell \begin{array}{l} \nearrow -2 \leftarrow \text{NO} \\ \searrow 1 \leftarrow \text{SI} \end{array}$$

—o—o—

<u>Osservazione</u> Studiare le x_{2n} e x_{2n+1} è equivalente a studiare l'iterazione doppia. Se pongo $y_n = x_{2n}$, $z_n = x_{2n+1}$, allora

$$y_{n+1} = f(f(y_n)) \qquad y_0 = x_0$$
$$z_{n+1} = f(f(z_n)) \qquad z_0 = x_1$$

Ora $f(f(x))$ è monotona crescente vicino ad $x=1$ (composizione di 2 monotone decrescenti). Quindi y_n e z_n le posso studiare con i metodi delle volte precedenti.

—o—o—

Oss. teorica   Sapendo che $x_{2n} \to 1$ e $x_{2n+1} \to 1$, si può dedurre che $x_n \to 1$

Lemma delle sottosuccessioni: prese K sottosucc. di x_n tali che
- la loro unione prende tutti gli x_n tranne un numero finito;
- tutte le k sottosucc. hanno lo stesso limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$,

allora $x_n \to l$.

Domanda: e se le sottosucc. sono infinite?

Metodo 2   Studio di una succ. spiraleggiante con la distanza dal presunto limite.

Pongo $d_n := |x_n - 1|$

PIANO
(i) $\frac{2}{3} \le x_n \le 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(ii) $d_{n+1} \le \quad d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
voglio un numero minore di 1.
(iii) $d_n \le \text{numero}^n \, d_0$
(iv) $d_n \to 0$, cioè $x_n \to 1$

Il punto essenziale è il (ii)

Dim (ii)

$$d_{n+1} = |x_{n+1} - 1| = \left| \frac{2}{x_{n+1}} - 1 \right| = \frac{|2 - x_n - 1|}{|x_n + 1|} =$$

$$= \frac{|1 - x_n|}{|x_n + 1|} = \frac{d_n}{|x_n + 1|} \le \frac{d_n}{\frac{2}{3} + 1} = \frac{3}{5} d_n$$

uso p.to (i) per mettere denom. + piccolo possibile

Il numero richiesto nel piano è $\frac{3}{5}$: va bene perché < 1.

Più in generale: $d_{n+1} = |x_{n+1} - l| = |f(x_n) - f(l)|$ (Lagrange)
$= |f'(\xi)| \cdot |x_n - l| = |f'(\xi)| \cdot d_n$

Quindi numero $= \max\{ |f'(x)| : x \in \text{zona ristretta al p.to (i)} \}$

Nell'esempio: numero $= \max\left\{ \frac{2}{(x+1)^2} : \frac{2}{3} \le x \le 2 \right\} = \frac{18}{25}$,
che è diverso da quello ottenuto prima, ma comunque < 1.

—o—o—

<u>Oss.</u> Se $f(\ell) = \ell$ e $|f'(\ell)| < 1$, allora pur di partire abbastanza vicino ad ℓ, la succ. tende ad ℓ

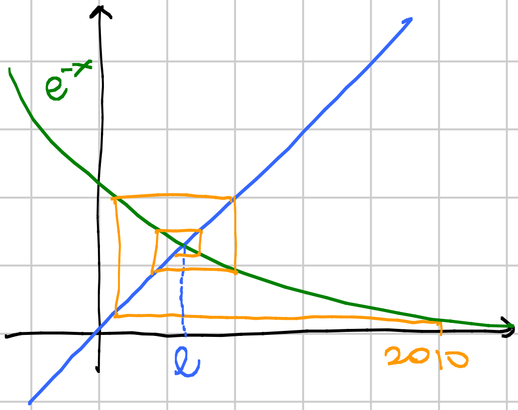
Se invece $|f'(\ell)| > 1$, allora se parto con $x_0 \neq \ell$, ma abbastanza vicino ad ℓ, avrò che $d_{n+1} \ge c\, d_n$ con $c > 1$ finché rimango abbastanza vicino. Quanto vicino?

In un intervallo $[a,b]$ con $\ell \in (a,b)$ e

$$\underbrace{\min\{|f'(x)| : x \in [a,b]\}}_{c} > 1.$$

—o—o—

<u>Esempio 2</u> $\quad x_{n+1} = e^{-x_n} \qquad x_0 = 2010$



Proviamo con la distanza $d_n = |x_n - \ell|$

(i) $0 \le x_n \le 2010$

(ii) $d_{n+1} \le c\, d_n \qquad$ (serve $c < 1$)

(iii) $d_n \le c^n d_0$

(iv) $d_n \to 0$, cioè $x_n \to \ell$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ $\quad d_{n+1} = |x_{n+1} - \ell| = |f(x_n) - f(\ell)|$

$$= |f'(\xi)| \cdot |x_n - \ell| = |f'(\xi)| \cdot d_n \le c\, d_n$$

dove $\quad c = \max\{|f'(x)| : 0 \le x \le 2010\}$

$$= \max\{e^{-x} : 0 \le x \le 2010\} = 1 \quad \text{GROSSO GUAIO}$$

Devo restringere il p.to (i) dimostrando che

(i-bis) $\quad x_1 \le x_n \le 2010 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

Fatto questo nel p.to (ii) possiamo usare

$$c = \max\{e^{-x} : x_1 \le x \le 2010\} = e^{-x_1} < 1 \text{ perché } x_1 > 0.$$

<u>Oss.</u> Iterare $x_{n+1} = e^{-x_n}$ è un modo per approssimare a piacere il valore di ℓ (la distanza stima l'errore che si commette)