# SSSUP 2010 — LEZIONE 10

Titolo nota 17/02/2010

<u>Esempio</u> $x_0 = 2010$, $x_{n+1} = \sqrt{3x_n+4}$.

Abbiamo visto che $x_n \to 4$ (unica sol. di $x = f(x)$; volendo si può usare una piccola modifica del teo. generale)

Domanda: quanto velocemente $x_n \to 4$?

Questo equivale a stimare $x_n - 4$.

Per capirlo, pongo $d_n := |x_n - 4|$ (distanza dal limite)

Cosa posso dire di $d_n$?

serve ricorr. + $f(4)=4$

$$d_{n+1} = |x_{n+1} - 4| \overset{\downarrow}{=} |f(x_n) - f(4)|$$

Uso Lagrange: $f(a) - f(b) = (a-b) \cdot f'(\xi)$ con $\xi$ tra $a$ e $b$.

Quindi:

$$d_{n+1} = |f(x_n) - f(4)| = |f'(\xi)| \cdot |x_n - 4| = \underbrace{|f'(\xi)|} \cdot d_n$$

se so stimare $f'(\xi)$ ho una stima di $d_{n+1}$ in funz. di $d_n$.

Nel nostro esempio

$f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+4}}$. Di $\xi$ so solo che $\xi \geq 4$, ma questo mi basta per dire che

$$|f'(\xi)| \leq \frac{3}{2\sqrt{3 \cdot 4 + 4}} = \frac{3}{8}$$

per avere frazione grande, metto denom. + piccolo possibile

Abbiamo così dimostrato che $d_{n+1} \leq \frac{3}{8} d_n$, da cui per induzione $d_n \leq \left(\frac{3}{8}\right)^n d_0$. Quindi $d_n \to 0$ esponenzialmente (almeno).

Per sapere che $d_n \to 0$ esattamente esponenzialmente, posso calcolare $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{d_n}$. Per calcolare questo limite uso il criterio rapporto $\to$ radice, cioè calcolo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x_{n+1}-4|}{|x_n-4|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|f(x_n)-f(4)|}{|x_n-4|}$$

(Lagrange) $= \lim_{n\to+\infty} |f'(\xi_n)| = f'(4)$ come si vedeva anche da qui

$= \frac{3}{8}$, cioè $f'$ nel punto di incontro.

$\boxed{\text{Oss.}}$ Questo metodo suggerisce un altro piano per lo studio di una successione.

$\boxed{\text{PIANO CON LA DISTANZA}}$

minore di 1

(i) $x_n \geq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) Pongo $d_n = |x_n - 4|$ e dimostro che $d_{n+1} \leq \boxed{\frac{3}{8}} d_n$

(iii) $d_n \to 0$, quindi $x_n \to 4$

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ Stesse di sempre

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Lagrange. Nota bene: il punto (i) serve a delimitare la zona in cui sta $\xi$, cioè la zona su cui stimare $|f'(x)|$.

$\boxed{\text{Dim (iii)}}$ È banale che $d_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Inoltre dal p.to (ii) ottengo per induzione che $d_n \leq \left(\frac{3}{8}\right)^n d_0$, quindi

$$0 \leq d_n \leq \left(\frac{3}{8}\right)^n$$ e concludo con i carabinieri

Oss. È fondamentale che nel punto (ii) si ritrovi un coefficiente minore stretto di 1, altrimenti (iii) non funziona

—o—o—

Teorema Sia $f(x)$ una funzione derivabile ($C^1$). Supponiamo che esista un p.to $m \in \mathbb{R}$ t.c.

(i) $m = f(m)$

(ii) $|f'(m)| < 1$

Allora, se $x_0$ è abbastanza vicino ad $m$, la succ. per ricorrenza $x_{n+1} = f(x_n)$ tende ad $m$.

Dim. Poiché $|f'(m)| < 1$ per continuità di $f'(x)$ esiste un intervallino $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ed esiste una costante $\delta < 1$ tali che $m \in (a,b)$ e

$$|f'(x)| \leq \delta < 1 \qquad \forall x \in (a,b)$$

(Se $|f'(x)| < 1$ in $x = m$, allora è vero in un intorno di $m$). Se parto con $x_0 \in [a,b]$ applico il piano con la distanza

(i) $a \leq x_n \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $d_{n+1} \leq \delta d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $d_n \to 0$, quindi $x_n \to m$. (banale quando $\delta < 1$)

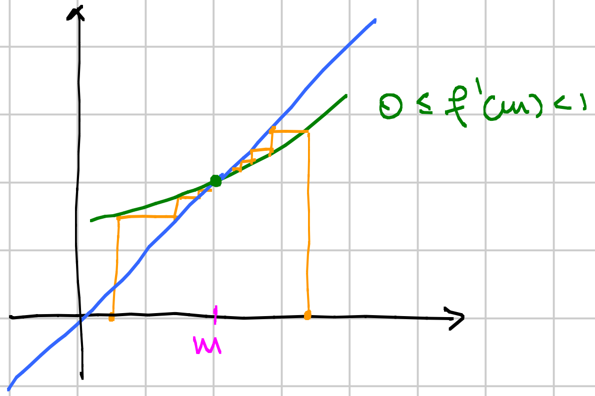
$\boxed{\text{Dim (ii)}}$: solito Lagrange

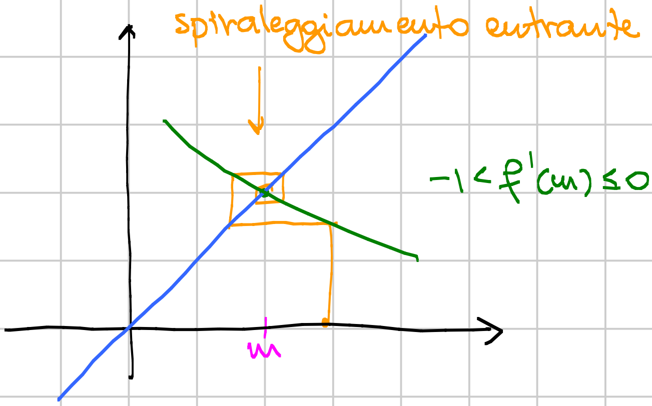
$$d_{n+1} = |x_{n+1} - m| = |f(x_n) - f(m)| = \underbrace{|f'(\xi)|}_{\leq \delta \text{ perché } \xi \in [a,b]} \cdot |x_n - m| \leq \delta \cdot d_n$$

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ Se ho scelto $[a,b]$ simmetrico rispetto ad $m$, cioè del tipo $[m-a, m+a]$, allora il p.to (i) si dimostra per induzione con lo stesso ragionamento del 2. Basta osservare che la distanza da $m$ diminuisce ad ogni passo.

—o —o —

Non è detto che $x_n \to m$ in maniera monotona. Se lo fa o meno dipende dal segno della derivata:




Cosa succede se $f'(m) > 1$ oppure $f'(m) < -1$ ??
Se parto con $x_0$ abbastanza vicino ad m, tendo ad allontanarmi. Perché ?

Mettiamo che $|f'(m)| > 1$. Allora esiste un intorno $[m-a, m+a]$ tale che

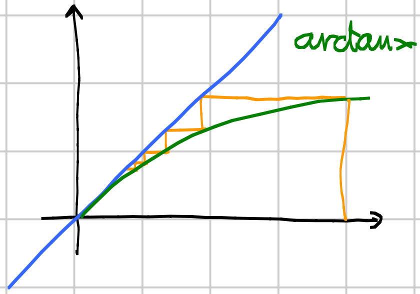
$$|f'(x)| \ge \delta > 1 \qquad \forall x \in [m-a, m+a]$$

Pongo il solito $d_n = |x_n - m|$ e ho che

$$d_{n+1} = |f(x_n) - f(m)| = |f'(\xi)| \cdot |x_n - m| \ge \delta \cdot d_n$$

Quindi, finché gli $x_n$ stanno nell'intervallino, abbiamo che $d_n$ cresce di un fattore $\delta > 1$ ad ogni passaggio, quindi $d_n \ge \delta^n \cdot d_0$ e quindi prima o poi esce dall'intornino.

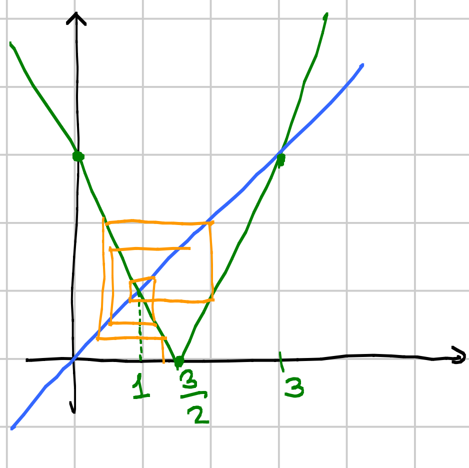
— o — o —




**Esercizio 1** $\quad x_0 = 2010, \quad x_{n+1} = \arctan x_n$

È facile che $x_n \to 0$ monotona.

Stimare come tende a zero (Problema: $f'(0) = 1$)




**Esercizio 2** $\quad x_0 = \sqrt{2}, \quad x_{n+1} = |2x_n - 3|$

Si può dim. che non ha limite.

Idee

① $0 \le x_n \le 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

② se fosse $\ell \in \mathbb{R}$ sarebbe $\ell = 1$ o $\ell = 3$

③ Se prova ad avvicinarsi a 1 o 3 viene respinta ④ non può essere $x_n \in \{1, 3\}$