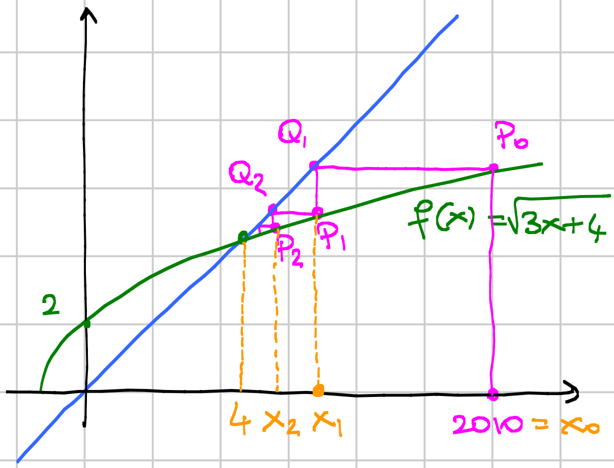
SSSUP 2010 - LEZIONE 09

$\boxed{\text{Succ. per ricorrenza AUTONOME}}$ Metodi di monotonia.

<u>Esempio</u> $x_0 = 2010$, $x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 4} = f(x_n)$

Interpretazione grafica: disegno $y = x$ e $y = \sqrt{3x+4}$ sullo stesso grafico



<u>Oss.</u> Nel disegnare i 2 grafici, devo risolvere

$f(x) = x$, $f(x) > x$, $f(x) < x$.

Considero i seguenti punti: parto da $x_0 = 2010$ e poi faccio

"VERTICALE ALLA FUNZIONE, ORIZZONTALE ALLA BISETTRICE"

(ogni volta trovo uno ed un solo punto)

$P_0 = (x_0, f(x_0)) = (x_0, x_1)$

$Q_1 = (x_1, x_1)$ stessa $\qquad P_1 = (x_1, f(x_1)) = (x_1, x_2)$

bisettrice

$Q_2 = (x_2, x_2)$ ....

In generale: $Q_n = (x_n, x_n)$, $P_n = (x_n, x_{n+1})$

Dal disegno, segue la congettura che

x_n è decrescente e $x_n \to$ intersezione $= 4$.

Bisogna avere un piano

(i) $x_n \geq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$

(iv) $\ell = 4$

} Piano standard con la monotonia

Ora occorre dimostrare in successione i vari punti del piano

Preliminarmente a tutto, ricordo che abbiamo già risolto

$x = \sqrt{3x+4} \iff x = 4$

$x \geq f(x) \iff x \geq 4$

Volendo abbiamo risolto anche $f(x) \geq 4 \iff x \geq 4$

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ Induzione $n=0$ banale

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Devo risolvere $x_{n+1} \geq 4$, cioè $f(x_n) \geq 4$, vera se $x_n \geq 4$ e questo è vero per ipotesi

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Devo risolvere $x_{n+1} \leq x_n$, cioè $f(x_n) \leq x_n$, ma sappiamo che questa è vera $\iff x_n \geq 4$ che è vera per il pto (i)

$\boxed{\text{Dim. (iii)}}$ Teo. succ. monotone (limitata infer. + deb. decr.)

$\boxed{\text{Dim. (iv)}}$ $\boxed{\text{Sapendo già che } \ell \in \mathbb{R}}$ posso passare al limite nella ricorrenza

$$\boxed{x_{n+1}} = \boxed{\sqrt{3x_n+4}}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \leftarrow \text{continuità di } f(x)$$

$$\ell = \sqrt{3\ell+4}$$

Ottengo così un'eq. in ℓ che altro non è che $f(x) = x$.
Questa ha come unica soluzione $\ell = 4$.

—o—o—

$\boxed{\text{Dim. alternativa di (i)}}$ Osservo che $f(x)$ è monotona crescente in $[4, +\infty)$. Dim. che $x_n \geq 4$ per indus.

$n=0$ sempre banale

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Per ipotesi so che $x_n \geq 4$. APPLICO $f(x)$

$$\underset{\substack{\parallel \\ x_{n+1}}}{f(x_n)} \geq \underset{\substack{\parallel \\ 4}}{f(4)} \qquad \text{(fondamentale } f \text{ deb. cresc.)}$$

$x_{n+1} \geq 4$ e questa è la tesi del passaggio induttivo

$\boxed{\text{Dim. alternativa di (ii)}}$ Per induzione

$\boxed{n=0}$ Devo dim. che $x_1 \le x_0$: questo si fa a mano o sfruttando $f(x) \le x$ per $x \ge 4$

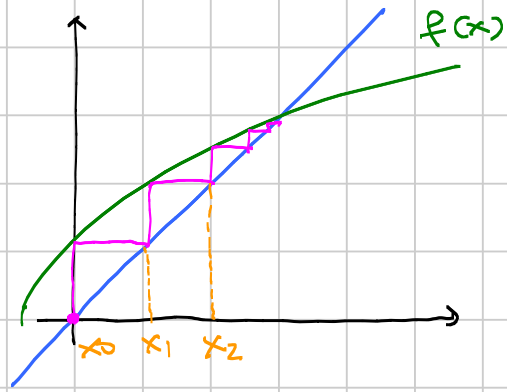
$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Per ipotesi so che $x_{n+1} \le x_n$. APPLICO $f(x)$

Ottengo $f(x_{n+1}) \le f(x_n)$

$$\begin{matrix} \shortparallel & & \shortparallel \\ x_{n+2} & \le & x_{n+1} \end{matrix}$$ che è la tesi del passo induttivo

— o — o —

<u>Esempio 1 bis</u> $x_0 = 0$ $x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 4}$



$\boxed{\text{PIANO}}$ serve (volendo si può mettere $-\frac{4}{3}$)

(i) $\boxed{0 \le} x_n \le 4$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_{n+1} \ge x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

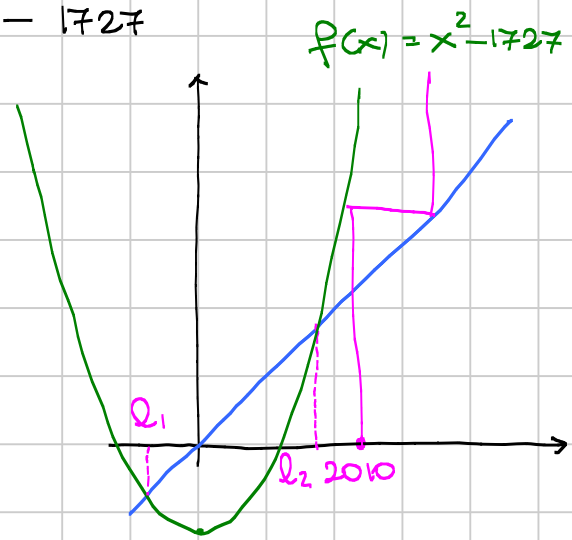
(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$

(iv) $\ell = 4$

Dim. come sopra (fare per esercizio)

— o — o —

<u>Esempio 2</u> $x_0 = 2010$ $x_{n+1} = x_n^2 - 1727$



Idea: x_n cresce e $x_n \to +\infty$

$\boxed{\text{PIANO}}$

(i) $x_n \ge 2010$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_{n+1} \ge x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(iv) $\ell = +\infty$

$\boxed{\text{Dim. (i)}}$ Induzione (o con disequazione, o applico $f(x)$ dopo aver osservato che è monotona crescente per $x \ge 0$)

$\boxed{\text{Dim. (ii)}}$ O uso disequazione $f(x) \ge x$
O induzione con "applico $f(x)$"

$\boxed{\text{Dim. (iii)}}$ Teo succ. monotone (qui uso la (ii), la (i) però l'ho usata nel dimostrare la (ii)).

$\boxed{\text{Dim. (iv)}}$ So che $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Suppongo per assurdo che sia $\ell \in \mathbb{R}$. Allora posso passare al limite nella ricorrenza e ottengo

$$
\begin{array}{ccc}
x_{n+1} & = & x_n^2 - 1717 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\ell & = & \ell^2 - 1717
\end{array}
$$

Questa ha 2 soluzioni ℓ_1 ed ℓ_2, che sono entrambe < 2010. Quindi questi limiti non sono compatibili con p.to (i). L'unica possibilità è che sia $\ell = +\infty$.

— o — o —

<u>Oss.</u> Se una succ. per ric. autonoma $x_{n+1} = f(x_n)$ ha un limite reale ℓ, allora ℓ è una soluzione dell'eq

$$x = f(x)$$

(sottinteso: f è continua). Questo è il p.to (iv) del piano. Se queste soluzioni sono incompatibili per qualche motivo, allora restano aperte 3 possibilità

1: $x_n \to +\infty$

2: $x_n \to -\infty$

3: x_n non ha limite.

— o — o —

$\boxed{\text{Esercizio / teorema}}$ Supponiamo di avere $x_{n+1} = f(x_n)$. Supponiamo che

- $f(x)$ è debolm. crescente in $\mathbb{R}$
- $f(x_0) < x_0$.

Allora ci sono solo 2 possibilità

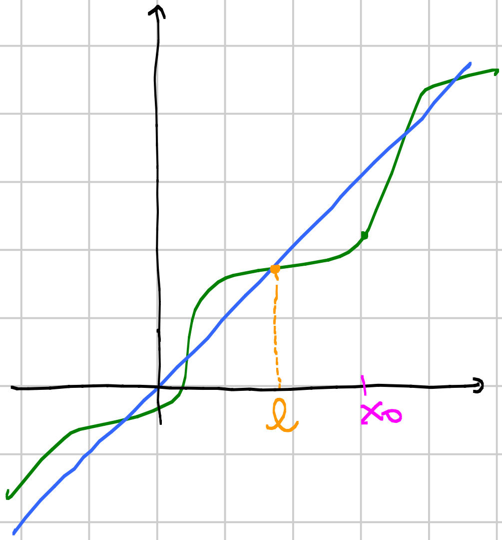
(i) $x_n \to -\infty$

(ii) $x_n \to \ell$, dove $\ell = \max\{x \leq x_0 : f(x) = x\}$

= prima soluzione di $f(x) = x$ a sx di x_0.

La (i) si realizza $\Leftrightarrow$ l'equazione $f(x) = x$ non ha soluzioni $\leq x_0$.

Dim Caso 1: esistono soluzioni di $f(x)=x$ con $x<x_0$.



Sia l la maggiore tra queste soluzioni. Abbiamo allora

(i) $x_n \geq l \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (induz. + applico f)

(ii) $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (" ")

(iii) $x_n \to$ limite reale (teo. succ. monot.)

(iv) limite $= l$

Dim. (iv): ... passo al limite e ottengo $f(l)=l$, quindi l risolve $f(x)=x$.

Le soluzioni $<l$ le escludo per il punto (i)

" " $\geq x_0$ le escludo per il punto (ii) oppure modificando il p.to (i) in $l \leq x_n \leq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Caso 2}}$ non esistono soluzioni di $f(x)=x$ con $x \leq x_0$

(i) $x_n \leq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (sostanzialmente inutile)

(ii) $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_n \to l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

(iv) $l = -\infty$ (se per assurdo $l \in \mathbb{R}$, allora $l = f(l)$, ma questa non ha soluzioni $\leq x_0$ ...)