Succ. per ricorrenza lineari omogenee

$\boxed{x_{n+1} = a x_n + b x_{n-1}}$ Dipendenza da 2 termini precedenti senza termini forzanti

Oss. 1 L'insieme di tutte le successioni è uno spazio vettoriale? Banalmente sì! È chiuso rispetto alla somma e rispetto al prodotto per una costante.

Oss. 2 L'applicazione che ad una qualunque succ. $\{x_n\}$ associa la successione $\{x_{n+2} - a x_{n+1} - b x_n\}$ è un'applicazione lineare? Banalmente sì!

Oss. 3 Le successioni che verificano la ricorrenza scritta sopra sono il ker di questa applicazione, cioè vengono mandate dall'applicazione nella successione nulla $(0, 0, 0, \dots)$.

Oss. 4 Il ker di una applicazione lineare è un s.spazio vettoriale di tutte le successioni. Questo è come dire che
- → la somma di 2 successioni che verificano la ricorrenza verifica a sua volta la ricorrenza
- → se moltiplico per una costante fissa tutti i termini di una soluzione ottengo a sua volta una soluzione.

Oss. 5 Qual è la dimensione dello spazio delle soluzioni? Due! Infatti x_0 e x_1 li posso fissare come mi pare (due gradi di libertà) e a quel punto i restanti termini saranno univocamente determinati.

Oss. 6 Quindi ogni soluzione della ricorrenza si può scrivere nella forma

$$x_n = \alpha y_n + \beta z_n$$

dove α e β sono numeri reali, e y_n e z_n sono due soluzioni particolari, purchè linearmente indipendenti (cioè l'una non è multipla dell'altra)

Conclusione: basta trovare 2 soluzioni speciali e si conoscono tutte le soluzioni.

Stessa cosa in modo del tutto elementare: prendo

y_n = successione ottenuta a partire da $x_0 = 1$, $x_1 = 0$

z_n = " " " " " $x_0 = 0$, $x_1 = 1$

Allora la successione ottenuta a partire da x_0 e x_1 qualunque è

$$x_n = x_0 \cdot y_n + x_1 \cdot z_n$$

(Qui si sfrutta pesantemente che la dipendenza è lineare e omogenea)

Posso ovviamente sostituire $(1,0)$ e $(0,1)$ con una coppia di vettori linearmente indip. di $\mathbb{R}^2$.

— o — o —

Tutto questo per dire: trovate y_n e z_n lin. indip. ho finito!!

Come trovarle? Se la dipendenza fosse solo dal termine prec. sarebbe banale. $x_{n+1} = a x_n \rightsquigarrow x_n = a^n$

Provo a vedere se posso trovare soluz. esponenziali anche se c'è dipendenza da 2 termini precedenti, cioè vedo se

$$x_n = R^n$$

risolve $x_{n+1} = a x_n + b x_{n-1}$. Sostituendo ottengo:

$$R^{n+1} = a R^n + b R^{n-1} \quad \text{cioè} \quad R^2 = aR + b, \quad \text{cioè} \quad R^2 - aR - b = 0$$

Caso 1 Se $\Delta > 0$, l'eq. $x^2 - ax - b = 0$ ha 2 soluzioni, dunque ho 2 valori di R che producono le 2 sol. lin. indip. La formula generale sarà quindi

$$\boxed{x_n = \alpha R_1^n + \beta R_2^n}$$

dove R_1 ed R_2 sono le 2 radici del polinomio, e α e β sono numeri reali scelti in modo da soddisfare le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x_0 \\ \alpha R_1 + \beta R_2 = x_1 \end{cases}$$

Questo ha sempre soluzione perchè $R_1 \neq R_2$ (cioè la lineare indipendenza)

Oss. Può accadere che a, b, x_0, x_1 siano interi. In questo caso è ovvio che tutti i termini della succ. saranno interi. Tuttavia R_1 ed R_2 possono essere irrazionali, così come α e β. Quindi la formula generale può essere piena di irrazionali che però si semplificano per ogni $n \in \mathbb{N}$!!!

Esempio (Fibonacci) $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$

Polinomio: $x^2 - x - 1 = 0$, quindi

$$R_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \text{ da cui } x_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Per calcolare α e β risolvo

$$\alpha + \beta = 0 \qquad \beta = -\alpha$$

$$\alpha \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \beta \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$$

$$\alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1 \Rightarrow \alpha \sqrt{5} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

conta poco o nulla per n grandi

da cui

$$\boxed{x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right\}}$$

Formula "esplicita" per numeri di Fibonacci

Esercizio Sia F_n la succ. di Fibonacci. Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$

Dalla formula esplicita viene $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = sezione aurea

— o — o —

$\boxed{\text{Caso } \Delta < 0}$ In questo caso $R_1 \neq R_2$ sono numeri complessi (coniugati)

Ottengo una formula generale dello stesso tipo

$$x_n = \alpha R_1^n + \beta R_2^n$$

dove α, β, R_1, R_2 stanno in $\mathbb{C}$. Tuttavia se a, b, x_0, x_1 erano reali, il risultato è per forza reale $\forall n \in \mathbb{N}$.

In alternativa: $R_1 = R e^{i\theta}$ $\qquad R_2 = R e^{-i\theta}$

$$= R(\cos\theta + i \sin\theta)$$

Quindi se una base era

$$R_1^n = R^n e^{in\theta} = R^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

$$R_2^n = \quad '' \quad = R^n (\cos(n\theta) - i \sin(n\theta))$$

una base sarà pure

$$R^n \cos(n\theta) \qquad R^n \sin(n\theta) \qquad (*)$$

da cui la formula generale

$$\boxed{x_n = \alpha R^n \cos(n\theta) + \beta R^n \sin(n\theta)}$$ solo numeri reali

in cui $R e^{\pm i\theta}$ sono le radici del polinomio, e α e β sistemano i dati iniziali.

<u>Oss.</u> Il fatto che le (*) siano soluzioni della ricorrenza si può verificare direttamente per induzione, senza nemmeno sapere cosa sono i numeri complessi !!!

$\boxed{\text{Caso } \Delta = 0}$ L'equazione ha 1 radice reale R di molt. 2.
Quindi R^n è un primo elemento della base. Ne serve un'altra, che è $n R^n$: basta sostituire nella ricorrenza e verificare (fatelo!)

La formula generale è quindi

$$\boxed{x_n = \alpha R^n + \beta n R^n}$$

— o — o —

<u>Oss. 1</u> Se la ricorrenza coinvolge k termini prec., ho k radici del polinomio ed è tutto analogo (una radice di molt. 3 produce R^n, $n R^n$, $n^2 R^n$)

<u>Oss. 2</u> Se ho $x_{n+1} = 3x_n - 5x_{n-1} + n^2$
cerco una soluzione speciale (di solito funziona un polinomio dello stesso grado) e poi uso il solito trucco di porre $y_n = x_n -$ sol. speciale.
Non funziona un pol. dello stesso grado (e allora bisogna salire di grado) quando $x=1$ è radice del polinomio associato (fare un paio di esempi per verificare!)