SSSUP 7 — LEZIONE 07

Titolo nota 09/02/2010

SUCCESSIONI PER RICORRENZA

x_0 dato, $x_{n+1} = f(x_n)$ Dipendenza solo dal termine prec. (AUTONOMA del 1° ordine)

x_0 dato, $x_{n+1} = f(x_n, n)$ Dipendenza anche da n (NON AUTONOMA del 1° ordine)

x_0, x_1 dati, $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, n)$ NON AUTONOMO 2° ordine

Analogamente si possono pensare dipendenze da k termini precedenti.

Esempi

$x_{n+1} = \arctan x_n$, $x_{n+1} = \cos x_n$

$x_{n+1} = 2x_n - n$, non autonomo

$x_0 = 3$ e $x_{n+1} = 2x_n - n$, quanto vale x_2?

$x_1 = 2x_0 - 0 = 6$, $x_2 = 2x_1 - 1 = 11$

quando calcolo x_1, ho che $n=0$

$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ (succ. di Fibonacci)

Domande:
* è monotona?
* è limitata?
* esiste il limite? Se sì, quanto vale?

Oss. Se uno vuole calcolare un certo x_n, occorre calcolare tutti i precedenti! Eccezione: quando è possibile trovare una formula esplicita.

Utilità: Per una macchina è molto semplice calcolare i termini di una successione per ricorrenza (bastano poche righe di programma).

Casi semplici in cui si può trovare una formula esplicita

Ricorrenze lineari del 1° ordine

$\boxed{x_{n+1} = a x_n + b}$ con a, b numeri reali fissati, x_0 fissato

Calcoliamo un po' di termini: x_0, $x_1 = a x_0 + b$,

$x_2 = a x_1 + b = a^2 x_0 + ab + b$

$x_3 = a x_2 + b = a^3 x_0 + a^2 b + ab + b$

$x_4 = a x_3 + b = a^4 x_0 + a^3 b + a^2 b + ab + b = a^4 x_0 + b(a^3 + a^2 + a + 1)$

$= a^4 x_0 + b \dfrac{a^4 - 1}{a - 1}$

Sembra ragionevole congetturare che

$$\boxed{x_n = a^n x_0 + b \frac{a^n - 1}{a - 1}}$$

Devo anche avere $a \neq 1$ (se no è banale)

Questa formula si dimostra banalmente per induzione (farlo per esercizio!)

Oss. 1 Ci sono dei punti fissi (cioè valori di x_0 che producono una succ. costante)? $x_0 = x_1 = x_2 = \ldots$

Essendo autonoma basta $x_1 = x_0$ per averla sempre costante. Se ℓ è fisso, allora

$\ell = a\ell + b$, cioè $\ell(1 - a) = b$, $\ell = \dfrac{b}{1 - a}$

se posso dividere. Quindi se $a \neq 1$, ho sempre un unico punto fisso.

Oss. 2 Poniamo $y_n = x_n - \ell$. Cosa risolve y_n?

$y_{n+1} = x_{n+1} - \ell = a x_n + b - \ell = a(y_n + \ell) + b - \ell$

ricavo x_n

$= a y_n + \underbrace{\boxed{a\ell + b}}_{= \ell \text{ per definizione di } \ell \text{ !!!}} - \ell = a y_n$

Quindi $y_{n+1} = a y_n$ da cui facilmente $y_n = a^n y_0$

Ora $y_n = a^n y_0 = a^n (x_0 - l) = a^n \left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right)$

Dalla formula esplicita per y_n ricavo quella per x_n:

$$x_n = y_n + l = a^n \left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}$$

che fatti i conti è la stessa formula di prima, ma ottenuta usando l'idea dei punti fissi.

—o—o—

Lineare del 1º ordine, ma non autonomo.

$x_{n+1} = 2x_n - n$. Caso più semplice $x_{n+1} = x_n - n$

x_0, $x_1 = x_0 - 0 = x_0$, $x_2 = x_1 - 1 = x_0 - 1$, $x_3 = x_2 - 2 = x_0 - 1 - 2$

$x_4 = x_3 - 3 = x_0 - 1 - 2 - 3 \ldots$

Congettura:

$$x_n = x_0 - 1 - 2 - \ldots - (n-1) = \boxed{x_0 - \frac{n(n-1)}{2}}$$ induzione !!!!

Domanda: esistono polinomi $p(n)$ di secondo grado che risolvono la ricorrenza? Cioè $x_n = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$

Proviamo

$$\alpha(n+1)^2 + \beta(n+1) + \gamma = 2\alpha n^2 + 2\beta n + 2\gamma - n$$

La risposta è no perché a sx il termine principale è αn^2, a dx è $2\alpha n^2$, quindi deve essere $\alpha = 0$

$$\beta n + \beta + \gamma = 2\beta n + 2\gamma - n$$

quindi $\beta = 2\beta - 1$, cioè $\beta = 1$ e infine $\gamma = 1$.

Verifica che $x_{n+1} = 2x_n - n$: $x_{n+1} = \beta(n+1) + 1 = n+2$

$$n+2 = 2(n+1) - n$$

Conclusione: esiste un polinomio di 1º grado che risolve la ricorrenza ed è $x_n = n+1$

Questa soluzione speciale gioca il ruolo del p.to fisso di prima.

Pongo ora $y_n = x_n - n - 1$ (x_n – soluzione speciale)
Cosa risolve y_n?

$$y_{n+1} = x_{n+1} - (n+1) - 1 = x_{n+1} - n - 2 \quad \text{(uso ricorrenza)}$$
$$= 2x_n - n - n - 2 = 2(x_n - n - 1) \quad \text{(uso def. di } y_n\text{)}$$
$$= 2y_n$$

Quindi $y_n = 2^n y_0 = 2^n (x_0 - 1)$, da cui

$$\boxed{x_n = y_n + n + 1 = 2^n (x_0 - 1) + n + 1}$$ Volendo si verifica per induzione !!!

—o—o—

<u>Altro esempio</u> Sia $x_{n+1} = a x_n + n^2 + 3n - 5$
Come trovare una formula esplicita?

1. Si cerca una soluzione esplicita qualunque, con un dato iniziale qualunque. Ragionevolmente sarà un polinomio di grado 2 in n. I coeff. si calcolano sostituendo nella ricorrenza.

2. Trovata la soluzione esplicita qualunque, si pone
$y_n = x_n -$ sol. esplicita
e si scopre che $y_{n+1} = a y_n$.
In questo punto è fondamentale che sia lineare la dipendenza dal termine precedente, cioè
$$x_{n+1} = \underbrace{a}_{\text{costante}} x_n + \underbrace{\text{Mostro}(n)}_{\text{qualunque cosa dipendente da } n \text{ e basta}}$$

1 + 2 ⇒ formula esplicita.

<u>Oss.</u> Se Mostro (n) = polinomio, allora la soluzione particolare sarà un pol. dello stesso grado (o di uno superiore se $a=1$)

$\boxed{\text{Analogia con eq. diff. lineari non omogenee}}$