

Precisazione L'implicazione

f lip. in $A \Rightarrow f$ $\frac{1}{2}$ -Hölder in A
vale se A è limitato (e così tutte le altre)

Dim. Hp: $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$

Ts: $|f(x) - f(y)| \leq H|x-y|^{1/2}$

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y| = \underbrace{L|x-y|^{1/2}}_{\leq H \text{ se } A \text{ è limitato}} \cdot |x-y|^{1/2}$$

Esercizio Sia $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua.

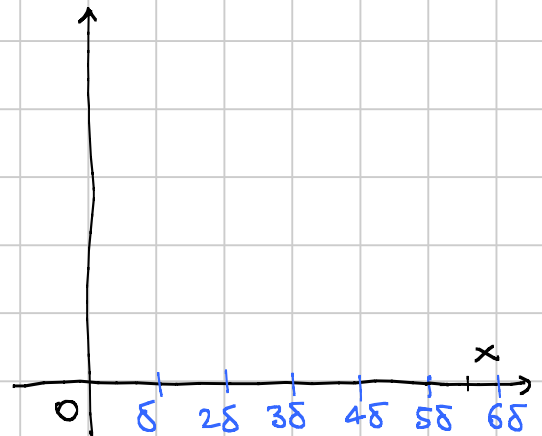
Allora f è sublineare, cioè esistono costanti A e B t.c.

$$f(x) \leq Ax + B \quad (\text{sta sotto una retta})$$

Dim. uso la definizione con $\varepsilon = 1$. Allora esiste δ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq 1 \quad \text{se} \quad |x-y| \leq \delta$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(5\delta) + 1 \\ &\quad f(5\delta) - f(4\delta) + 1 \\ &\quad \vdots \\ &\quad f(\delta) - f(0) + 1 \\ &\quad f(0) \end{aligned}$$



Quindi $f(x) \leq f(0) + \left\lceil \frac{x}{\delta} \right\rceil$ ↑ parte intera superiore

$$\leq f(0) + \frac{x}{\delta} + 1$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\delta}}_A \cdot x + \underbrace{(f(0) + 1)}_B$$

A

B

Teorema (non dimostrato) Se A è compatto e $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora f è unif. continua.

Esempio $f(x) = \sqrt{x}$ è unif. cont. in $[0, +\infty)$?

[SI] in $[0, 10]$ è unif. continua perché è continua e d'interv. è compatto.

In $[10, +\infty)$ è lip., dunque unif. continua

Inoltre l'uniforme continuità si può "attaccare"

Esercizio Sia $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ una funzione con

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx < +\infty$$

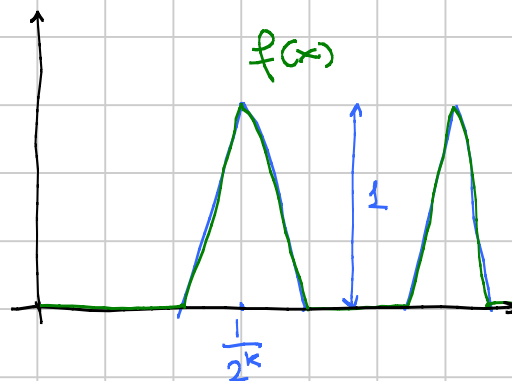
Posso concludere che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$?

ASSOLUTAMENTE NO!!!

Esempio: grafico = unione di triangoli "qui tanto"

integrale = somma aree

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots < +\infty$$



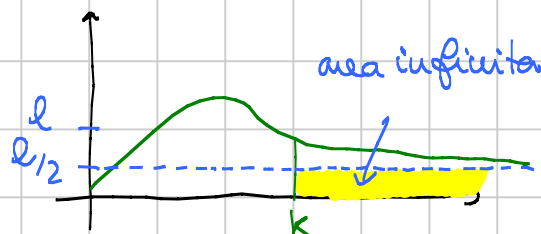
Posso anche fare altezze = 2^k , basi = $\frac{1}{4^k}$.

In questo modo

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Posso concludere che almeno $\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$?

[SI] Se così non fosse, vorrebbe dire che $\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l > 0$,
ma allora $f(x) \geq \frac{l}{2}$ definitivamente



Terza domanda: sapendo che $\mathcal{Q}$ integrale è finito e $f(x)$ è uniformemente continua, possiamo dedurre che $f(x) \rightarrow 0$?

Sì! Devo dimostrare che $\limsup_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (il liminf lo seguirà!)

Se $\limsup_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L > 0$, vuol dire che $\exists x_n \rightarrow +\infty$ con $f(x_n) \geq \frac{L}{2}$

Essendo unif. continua, ci metterà un po' a tornare giù dopo x_n , quindi f si mantiene alta per parecchio tempo e quindi $\mathcal{Q}$ integrale diverge.

Detto bene: applico la def. di unif. continuità con $\varepsilon = \frac{L}{4}$.

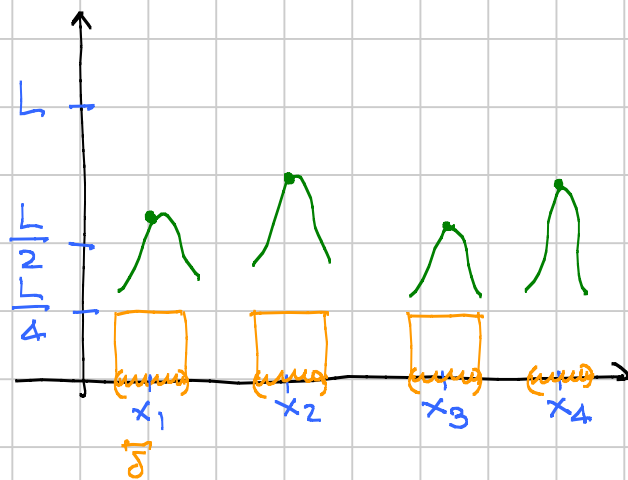
Allora $\exists \delta > 0$ (e universale) tale che

$$|f(x) - f(x_n)| \leq \frac{L}{4} \quad \text{se} \quad |x - x_n| \leq \delta$$

Quindi negli intervalli

$[x_n - \delta, x_n + \delta]$ la funzione non scende sotto $\frac{L}{4}$

Quindi ciascuno di questi intervalli contribuisce con $2\delta \cdot \frac{L}{4}$ all'integrale.



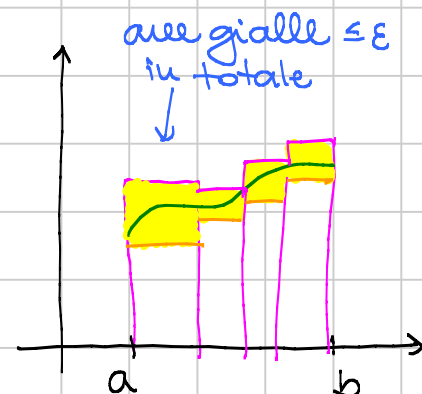
Occhio! in questo ragionamento sto assumendo che gli intervalli ci siano disgiunti. Se non lo sono, basta che prenda una s.succ. degli x_n in modo che lo siano

Esercizio Sia $f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ unif. continua.

Cosa posso dire del $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$? Esiste?

Sì Modo per vederlo: se non esistesse avrei 2 succ. $x_n \rightarrow 0^+$ e $y_n \rightarrow 0^+$ con $f(x_n) \rightarrow L_1$ $f(y_n) \rightarrow L_2$ con $L_1 \neq L_2$, ma allora...

Esercizio Sia $f: [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$ continua (vale anche se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$). Allora $\forall \varepsilon > 0$ esistono rettangoli sopra e sotto le cui aree differiscono per meno di ε .



Dim. Essendo f continua su un compatto è unif. continua.

Applico la def. con ε . Allora $\exists \delta > 0$ (universale) t.c.
 $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ quando $|x - y| \leq \delta$.

Costruisco dei rettangoli qualunque purché con basi di lunghezza $\leq \delta$. In ogni intervallo uso come altezze dei rettangoli il max ed il min di f nell'intervallo. Questi distano meno di ε . Quindi

$$\begin{aligned} \text{avanzo} &= \text{somma aree differenze} \\ &\leq \text{somma } \varepsilon \cdot \text{lungh. base} \\ &= \varepsilon \cdot (b-a) \end{aligned}$$

Questo può diventare piccolo a piacere.

Esercizi

① Trovare $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ che sia uniformemente continua, ma non α -Hölderiana per ogni $\alpha \in (0, 1)$.

(f deve tendere a 0 meno velocemente di tutte le radici n -esime)

② Sia $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Discutere questo enunciato
 f $\frac{1}{2}$ -Hölder $\Leftrightarrow f^2$ Lipschitz

③ Sia $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x} . \quad \text{È lip. ? È Hölder per un qualche } \alpha ?$$