SSSUP 2010 — LEZIONE 05

Titolo nota 03/02/2010

Uniforme continuità – Moduli di continuità
LIPSCHITZIANITÀ – HÖLDERIANITÀ

Ambientazione: $A \subseteq \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset$ $f: A \to \mathbb{R}$

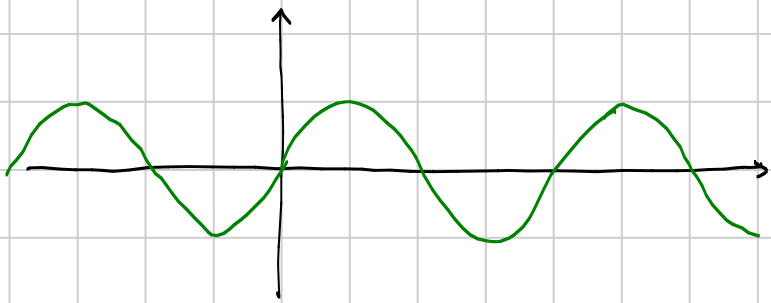
Def. 1 Si dice che f è $\boxed{\text{continua}}$ in A se
$\forall x \in A$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c.
$$|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon \qquad \forall y \in [x-\delta, x+\delta] \cap A$$

Brutalmente: se x e y distano meno di δ, allora $f(x)$ e $f(y)$ distano meno di ε.

Def. 2 Si dice che f è $\boxed{\text{uniformemente continua}}$ in A se
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c.
$$|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon \qquad \forall x \in A \quad \forall y \in A \text{ t.c. } |x-y| \leq \delta.$$

Differenza Nella def. di funzione continua δ dipende da x e da ε
Nella def. di funzione unif. continua δ dipende solo da ε, cioè c'è un δ che va bene per tutti i punti $x \in A$.

Esempio 1 $f(x) = \sin x$ è uniformemente continua su tutto $\mathbb{R}$



Fisso ε: voglio che $f(x)$ e $f(y)$ distino meno di ε. "Il δ che va bene nel tratto + pendente va bene ovunque.

Esempio 2 $f(x) = x^2$ su tutto $\mathbb{R}$
non è uniformemente continua. Nei tratti + pendenti mi serve δ sempre + piccolo.

$\boxed{\text{Modulo di continuità}}$ Data $f: A \to \mathbb{R}$ unif. continua, il suo modulo di continuità è la funzione che ad ε associa δ.

Più rigorosamente

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{raggio}}}{\omega(r)} = \sup\{|f(x)-f(y)| : x \in A, y \in A, |x-y| \le r\}$$

Questa funzione è definita per ogni $r \ge 0$ ed è finita proprio perchè f è uniformemente continua.

Se ω è il modulo di continuità di f, allora

$$\boxed{|f(x)-f(y)| \le \omega(|x-y|) \qquad \forall x \in A, \forall y \in A}$$

Una relazione di questo tipo permette di stimare la differenza tra 2 valori di $f(x)$ nota la differenza tra gli argomenti.

Un modulo di continuità permette di stimare l'errore che si commette nel calcolare una funzione usando un valore approssimato dell'argomento.

—o—o—

Def. Una $f: A \to \mathbb{R}$ si dice Lipschitziana in A se il suo modulo di continuità è del tipo $\omega(r) = Lr$ con $L \in \mathbb{R}$. La più piccola costante L che va bene si dice costante di Lipschitz di f in A.

Def. $f: A \to \mathbb{R}$ si dice Hölderiana con esponente $\alpha \in (0,1)$ se il suo modulo di continuità è del tipo

$$\omega(r) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{costante reale}}}{H} r^\alpha$$

Oss. Lipschitzianità = Hölderianità con esponente $\alpha = 1$.

Rapporti tra le definizioni:

Funzioni continue
$\cup|$
Funzioni unif. continue
$\cup|$
Funzioni Hölderiane (più α è vicino ad 1 e meglio è)
$\cup|$
Funzioni Lipschitziane
$\cup|$
Funzioni C^1 (derivabile con derivata continua)

Esercizio: quali sono le funzioni Hölderiane con $\alpha = 7$?
Vorrebbe dire che

$$|f(x) - f(y)| \leq H|x-y|^7$$

Divido per $|x-y|$ e faccio $y \to x$. Ottengo

essenziale che $\alpha > 1$.

$$|f'(x)| = \lim_{y \to x} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \leq \lim_{y \to x} H|x-y|^6 = 0$$

Vorrebbe quindi dire che f è derivabile e la sua derivata è 0, quindi f è localmente costante (cioè costante in ogni intervallo contenuto in A).

—o—o—

Esempio 1 $f(x) = |x|$ è Lip., ma non C^1 in $\mathbb{R}$.
La Lip. segue banalmente da

$$||x|-|y|| \leq |x-y| \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}$$

costante 1.

Esempio 2 $f(x) = \sqrt{x}$ in $A = [0, +\infty)$.
Questa è $\frac{1}{2}$-Hölder per via della disuguaglianza

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$$

costante 1.

Come si dimostra? Assumo WLOG (without loss of generality) che sia $x \geq y$: $\sqrt{x} - \sqrt{y} \overset{?}{\leq} \sqrt{x-y}$

$$\cancel{x} + y - 2\sqrt{xy} \leq \cancel{x} - y, \quad \cancel{2}y \leq \cancel{2}\sqrt{xy}, \quad y^2 \leq xy, \quad y \leq x \text{ ok.}$$

Perché non è Lipschitziana? Se fosse

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq L|x-y|$$

Prendo $y = 0$ e ottengo $\sqrt{x} \leq Lx$, cioè $1 \leq L\sqrt{x}$

ora faccio tendere $x \to 0^+$ e ho un assurdo.

—o—o—

Lipschitzianità e derivate prime

[Dopo video]

Lipschitzianità $\not\Rightarrow$ esistenza di $f'(x)$.

Tuttavia, se $f'(x)$ esiste, allora è limitata.

Dim. Hp: $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$. Prendo x_0 in cui f' esiste

$$|f'(x_0)| = \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(\overset{x}{\overset{\shortparallel}{x_0 + h}}) - f(\overset{y}{\overset{\shortparallel}{x_0}})}{h} \right| \leq L.$$

—o—o—

Viceversa: se $\boxed{A \text{ è un intervallo}}$ e $f: A \to \mathbb{R}$ è una funzione con derivata limitata, allora f è lip. in A e la sua costante di lip. è

$$L = \sup\{|f'(x)| : x \in A\}$$

Dim. teo Lagrange:

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x-y| \leq L|x-y|.$$

Questo dimostra che f è lip. con costante L. Può essere che sia lip. con una costante $L_1 < L$?

No! Per il p.to precedente, se f fosse Lipschitziana con costante L_1 avremmo che $|f'(x)| \leq L_1 \ \forall x \in A$, quindi L non sarebbe il sup.

<u>Esempio 1</u> $f(x) = \sin x$ è Lip. con costante 1 su tutto $\mathbb{R}$

$$|\sin x - \sin y| \le |x-y| \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$$

Stessa cosa per $\cos x$ e $\arctan x$

<u>Esempio 2</u> $f(x) = x^2$ è Lip. in $[-100, 100]$ con costante 200

perché $200 = \sup\{|f'(x)| : x \in [-100, 100]\}$

$= \max$ "

$$|x^2 - y^2| \le 200\,|x-y| \qquad \forall x, y \in [-100, 100].$$

<u>Esempio 3</u> $f(x) = \sqrt{x}$ non è Lip. in $[0, +\infty)$

" " " " $(0, +\infty)$

$f(x) = \sqrt{x}$ è Lip. in $[\frac{1}{3}, +\infty)$ con costante $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Infatti

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sup\{|f'(x)| : x \in [1/3, +\infty)\}$$

<u>Esempio 4</u> $f(x) = x \sin x$ è Lip. sui compatti (perché è C^1)

Su tutto $\mathbb{R}$ non è Lip. perché

$f'(x) = \sin x + x\cos x$ non è lim. in $\mathbb{R}$