

Compattezza (per successioni)

Definizione Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice compatto se ogni successione a valori in A ammette almeno una sottosuccessione convergente (ad un numero reale $\in A$)

Esempio 1 $A = \mathbb{R}$ non è compatto. Basta prendere $x_n = n$
" 2 $A = (0, +\infty)$ non è compatto. Come prima.

Morale: gli insiemi non limitati non possono essere compatti

Esempio 3 $A = (0, 1)$ non è compatto. Basta prendere $x_n = \frac{1}{n}$
(tutte le s.succ. tendono a 0 $\notin A$)

Morale: se A non è chiuso, allora A non è compatto.

Teorema (BOLZANO - WEIERSTRASS) $A \subseteq \mathbb{R}$
 A compatto $\Leftrightarrow A$ chiuso + limitato

Teorema (Weierstrass) Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo

- f continua in A ;
- A compatto (cioè chiuso + limitato)

Allora f ammette max e min in A .

Funzioni semicontinue $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in A$ e di accumulazione

Si dice che

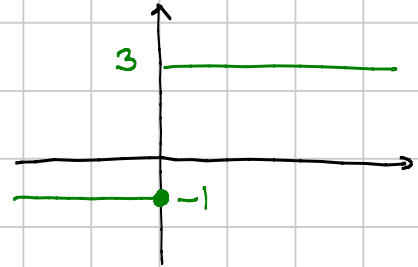
- f è continua in x_0 se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- f è semicontinua inferiormente in x_0 se $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0)$

(brutalmente: al limite $f(x)$ precipita in basso)

- f è semicontinua superiormente in x_0 se $\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$

Si dice che $f(x)$ è continua, s.c.i., s.c.s. in tutto A se lo è in tutti i p.ti di A .

Esempio $f(x) = -1$ per $x \leq 0$
 3 per $x > 0$



è s.c.i.,

Se $f(0) \leq -1$ è s.c.i.

Se $f(0) \geq 3$ è s.c.s.

Se $-1 < f(0) < 3$ non è nessuno dei due.

Teorema di Weierstrass Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo

- A compatto
- f s.c.i. in A .

Allora f ammette per forza il minimo (risultato simmetrico ammettendo f s.c.s.)

— o — o —

Dim. B-W Ipotesi: A chiuso + limitato, x_n succ. in A
Tesi: $\exists x_{m_k}$ che converge ad un elemento di A .

Oss.: essendo A chiuso, basta che x_{m_k} abbia limite ed il limite starà in A .

Chi è il candidato limite? Uno possibile è

$$L = \inf \{ x \in \mathbb{R} : x_n \leq x \text{ per infiniti indici } n \}$$

① L'insieme $\{ \dots \} \neq \emptyset$ perché A è limitato superiormente.

② L'inf non può essere $-\infty$ perché A è limitato inferiormente.

③ Quindi $L \in \mathbb{R}$. Trovo una s.succ. $x_{m_k} \rightarrow L$

Prendo $\varepsilon = 1$.

Esistono • infiniti n b.c. $x_n \leq L+1$

• finiti n b.c. $x_n \leq L-1$

(altrimenti L non sarebbe l'inf!!)

Quindi tra $L-1$ e $L+1$ ci sono "infiniti x_n "

Ne prendo uno e lo chiamo x_{m_1} .

Prendo $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Come prima ci sono infiniti indici n per cui

x_n sta in $[L - \frac{1}{2}, L + \frac{1}{2}]$. Ne prendo uno con indice $m_2 > m_1$

E così via con $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$ ($\circ \frac{1}{2^k}$).

Otengo una $x_{m_k} \rightarrow L$ per definizione.

La chiusura la uso solo per dire che $L \in A$.

— o — o —

Dim. W. in versione s.c.i.

Ipotesi: A compatto

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ s.c.i.

Tesi: esiste $\min \{f(x) : x \in A\}$.

Esiste di sicuro $\inf \{f(x) : x \in A\} = m$

Per quanto ne sappiamo ora può essere $m \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

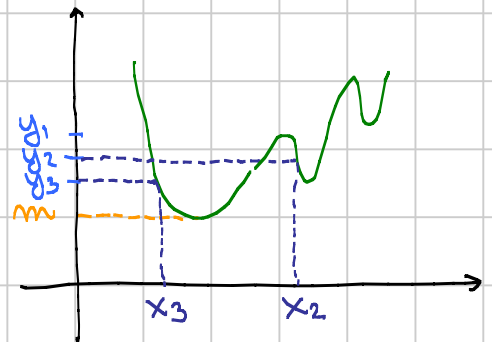
In ogni caso, per definizione di inf, esiste una successione $y_n \rightarrow m$ contenuta nell'immagine di $f(x)$.

Allora posso $y_n = f(x_n)$ con $x_n \in A$.

Perché A è compatto e $x_n \in A$,

per B-W esiste una s.succ.

$x_{m_k} \rightarrow x_0 \in A$



Spero che $f(x_0) = m$. Perché è vero?

So che

$$m \leq f(x_0) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \liminf_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = m$$

$\uparrow$ perché m è l'inf. $\uparrow$ perché f è s.c.v. $\uparrow$ Def. di x_{n_k} $\uparrow$ definizione di y_{n_k}

Quindi sono tutti uguali, dunque $f(x_0) = m$.

Oss. Se f è s.c.s. la dimostrazione è la stessa

Esercizio Trovare una funzione $f: (0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua per la quale massimo e minimo in $(0,1]$ non esistono.

Completezza Una successione x_n di numeri reali si dice successione di Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tale che}$$

$$|x_n - x_m| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N, \forall m \geq N.$$

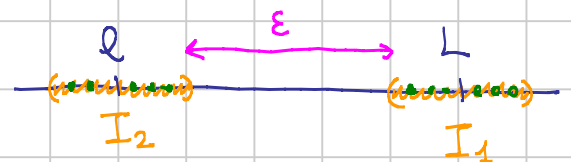
(Bruttalmente: x_n ed x_m sono vicini se n ed m sono grandi)

Teorema Tutte le successioni di Cauchy convergono (lim. $\in \mathbb{R}$).
(converge tutta la succ., non solo una s. succ.)

Idea della dim. ① una succ. di Cauchy è limitata (basta prendere $\varepsilon = 1$ nella definizione)

② Prendo $L = \limsup$ e $l = \liminf$. Dal p.to ① so che sono reali. Voglio dimostrare che sono uguali. Per assurdo sia $l \neq L$, cioè $l < L$.

Per caratterizzazione di l e L si ha che



• a_n sta infinite volte in I_1 e infinite volte in I_2 .

Quindi esiste un $\varepsilon > 0$ (cioè la distanza tra I_1 e I_2) ed esistono x_n con indici grandi che stanno a distanza $> \varepsilon$.

Questo contraddice la definizione.