

SSSUP 2010 - LEZIONE 03

Titolo nota

02/02/2010

Liminf e limsup di funzioni $A \subseteq \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset$ $f: A \rightarrow \mathbb{R}$
 $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A .

Def. Si dice che

- $\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ se $\forall \varepsilon > 0$ si ha che

$$\sup\{f(x) : x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \cap A\} \setminus \{x_0\} = +\infty$$

- $\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ se

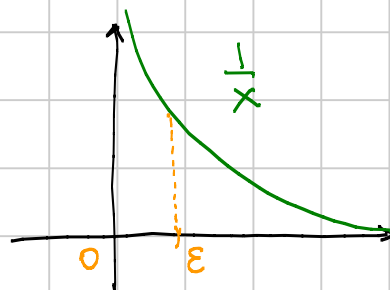
$$L = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup\{f(x) : x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \cap A\} \setminus \{x_0\}$$

Oss. Il sup scritto dentro al limite è una funzione di ε . Quando ε scende, il sup decresce, quindi il limite esiste per forza per il teo. delle funzioni monotone.

Oss. Ho dato la definizione nel caso $x_0 \in \mathbb{R}$. Modifiche ovvie nel caso in cui $x_0 = +\infty$ oppure $x_0 = -\infty$, o ancora se faccio il limsup solo a x_0^+ o x_0^- .

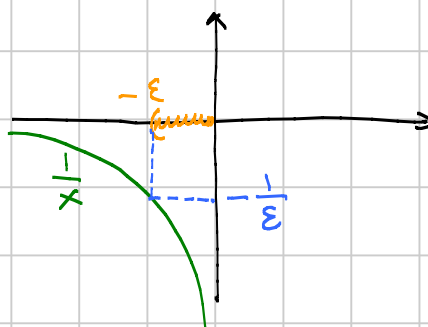
Esempio 1 $\limsup_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Infatti

$$\sup\{f(x) : x \in (0, \varepsilon)\} = +\infty \quad \forall \varepsilon > 0$$



Esempio 2 $\limsup_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$. Infatti

$$\sup\{f(x) : x \in (-\varepsilon, 0)\} = -\frac{1}{\varepsilon}$$



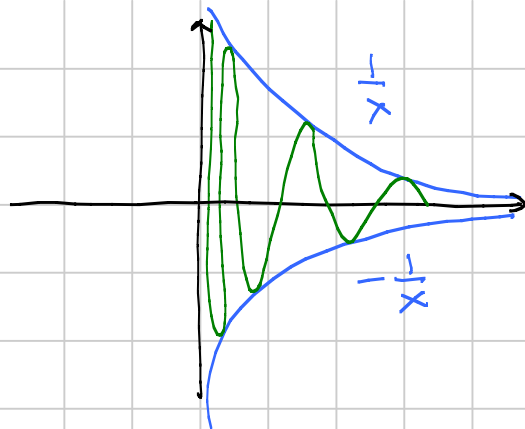
Quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ il sup $\rightarrow -\infty$.

Esempio 3 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ N.E.

$$\limsup_{x \rightarrow 0^+} \dots = +\infty$$

Infatti $\forall \varepsilon > 0$ si ha che

$$\sup \{ f(x) : x \in (0, \varepsilon) \} = +\infty$$



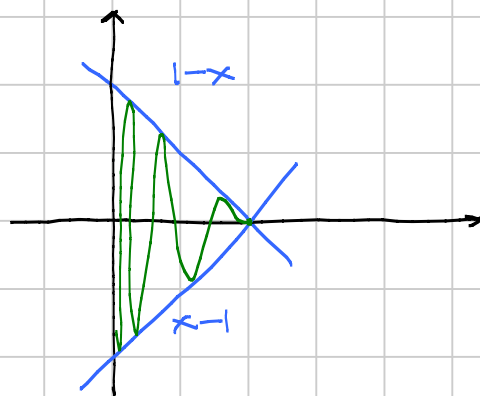
Esempio 4 $\limsup_{x \rightarrow 0^+} (1-x) \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1$.

Infatti in questo caso

$$\sup \{ f(x) : x \in (0, \varepsilon) \} = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$$

quindi $\sup \rightarrow 1$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

— 0 — 0 —



Def. Si dice che

- $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ se

$$\inf \{ f(x) : x \in ([x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \cap A) \setminus \{x_0\} \} = -\infty \quad \forall \varepsilon > 0$$

- $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ se

$$l = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \inf \{ f(x) : x \in \text{come sopra} \}$$

— 0 — 0 —

Liminf, Limsup, e successioni Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$,

sia x_0 p.to di accumulazione per A , sia x_n una successione contenuta in A tale che $x_n \rightarrow x_0$ e $x_n \neq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Tutto ciò SE il limite della funzione esiste !!!

Usando $\liminf$ e $\limsup$ si avrà sempre che

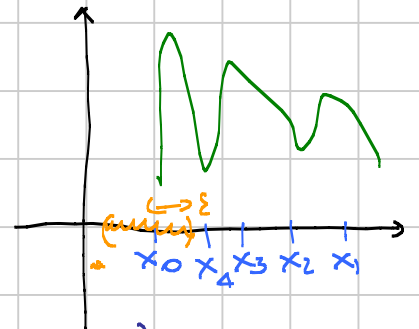
$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Corollario Se esiste il limite di funzione, allora gli estremi coincidono, allora tutti i $\leq$ sono $=$, allora il limite di succ. esiste e coincide col precedente.

Idea della dim. Dimostriamo solo quella a destra.

Se il $\limsup$ della funzione è $+\infty$, non c'è nulla da dimostrare

Fisso $\varepsilon > 0$. Definitivamente la succ. entra in $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. Ma allora per k abbastanza grandi



$$\sup \{f(x_n) : n \geq k\} \leq \sup \{f(x) : x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap \dots\}$$

quindi il limite del termine a sx è $\leq$ del limite del termine a destra.

— o — o —

Corollario $\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$ è il massimo tra tutti i limiti del

tipo $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$, dove $x_n \rightarrow x_0$. Idem per il $\liminf$.

— o — o —

Esempio 1 Se $x_n \rightarrow +\infty$, cosa posso dire di $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(x_n)$?

Risposta sbagliata: il limite non esiste !!

Risposta corretta: il limite può non esistere, oppure può essere un qualunque valore compreso tra -1 e 1 .

Come già detto, il $\limsup$ è il + grande tra i limiti che esistono

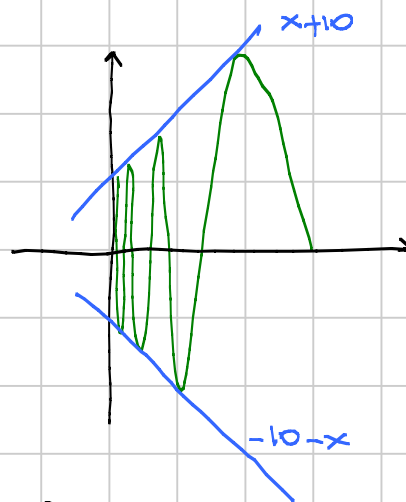
Esempio 2 $f(x) = (x+10) \sin \frac{1}{x^{20}}$. Prendo $x_m \rightarrow 0^+$.

Cosa posso dire di $\lim_{m \rightarrow \infty} f(x_m)$?

Come prima:

→ o non esiste

→ o è compreso tra -10 e 10.



Come si dimostra rigorosamente un $\limsup$ o un $\liminf$?

Di solito occorre fare 2 cose:

① una stima

② trovare una successione opportuna

(La via dell'epsilon in genere è impraticabile).

Nell'esempio: ① stima $f(x) \leq x+10$. A questo punto posso dire

$$\limsup_{x \rightarrow 0^+} f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow 0^+} (x+10) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+10) = 10$$

per i limiti ci sono molti
+ strumenti

② Si tratta di trovare una successione $x_m \rightarrow 0^+$ t.c. $f(x_m) \rightarrow 10$.
Per questo basta fare in modo che

$$\sin \frac{1}{x_m^{20}} = 1, \text{ cioè } \frac{1}{x_m^{20}} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \text{ quindi}$$

$$x_m = \frac{1}{\sqrt[20]{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}}$$

È ovvio che $x_m \rightarrow 0^+$ e $f(x_m) \rightarrow 10$
poiché

$$f(x_m) = (x_m+10) \sin \frac{1}{x_m^{20}} = (x_m+10)$$

Teorema di De L'Hôpital

Sotto un po' di ipotesi ... si ha che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

↑
una di queste è che
il limite a dx ESISTA

In versione liminf / limsup: ferme restando tutte le ipotesi tranne l'esistenza del limite a destra si ha comunque che

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Idea del caso $\frac{0}{0}$ e $x \rightarrow x_0^+$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}$$

perché sono
nel caso $\frac{0}{0}$,

quindi

$$f(x_0) = g(x_0) = 0$$

(posso cambiare i valori
in x_0 in modo che sia
vera conservando la
continuità di f e g)

Quando $x \rightarrow x_0$, ho che $c(x) \rightarrow x_0$
(cavallini), quindi

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}$$

$$\leq \limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

e non
necessariamente
è uguale !!!

— 0 — 0 —

Osservazione sul teorema Dove devono essere definite $f(x)$
e $g(x)$?

Risposta sbagliata: in un insieme aperto $A \subseteq \mathbb{R}$ di cui x_0
è p.to di accumulazione.

Risposta corretta: almeno nell'intervallo $(x_0, x_0 + \delta)$ per un
opportuno $\delta > 0$.