

Teorema sottosuccessioni a_n succ., a_{n_k} s.succ.

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} \leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

idem come per
il $\limsup$.

banale

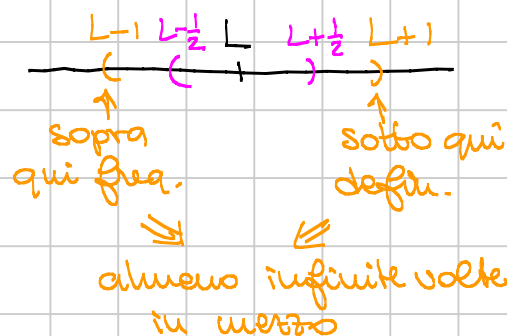
segue dalla ④ enunciata
in precedenza: se $L \geq a_n$
defin., a maggior
ragione $L \geq a_{n_k}$ defin.

Corollario Se esiste il limite della succ. a_n , allora i 2 estremi
sono uguali, quindi è tutto uguale, quindi a_{n_k} ha
limite ed il limite è lo stesso.

Teorema Se $L = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$, allora esiste sempre una sottosucc.

a_{n_k} che ha limite, ed il limite è proprio L .

Dim. Prendo $\varepsilon = 1$. Trovo $n_1 \in \mathbb{N}$
tale che $a_{n_1} \in (L-1, L+1)$



Prendo $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Trovo $n_2 \in \mathbb{N}$ tale che
 $n_2 > n_1$ e $a_{n_2} \in (L - \frac{1}{2}, L + \frac{1}{2})$
e così via dal passo k al passo $k+1$...

Prendo $\varepsilon = \frac{1}{k+1}$. Trovo $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ tale che $n_{k+1} > n_k$ e

$$a_{n_{k+1}} \in \left(L - \frac{1}{k+1}, L + \frac{1}{k+1} \right). \quad \text{È chiaro che } a_{n_k} \rightarrow L.$$

Stesso discorso vale per il $\liminf$.

Abbiamo così dimostrato che $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \max_{n \rightarrow +\infty} a_n$, cioè il
massimo tra i limiti possibili
per una sottosucc.

Analogamente $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \min_{n \rightarrow +\infty} a_n = \text{minimo} \dots$

Liminf e Limsup si comportano male nei teo. algebrici

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

(Pensare ad $a_n = 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$ $b_n = 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$)

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

Se uno dei 2 è limitato (cioè a_n o b_n hanno limite), allora vale il segno di uguale.

Con il prodotto è molto + complicato per via dei segni.

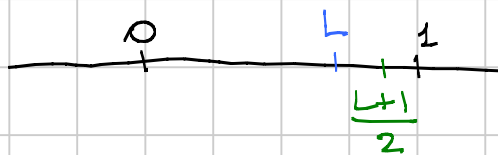
Teorema della radice Sia $a_n \geq 0$.

Se $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, allora $a_n \rightarrow +\infty$ (in tal caso infatti $\sqrt[n]{a_n} > \frac{L+1}{2}$ definitivamente, quindi $a_n > \left(\frac{L+1}{2}\right)^n$ definitivamente.)
 $\downarrow$
 $+\infty$

Se $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, allora $a_n \rightarrow 0$.

Infatti $\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{L+1}{2}$ definitivamente.

dunque $0 \leq a_n \leq \left(\frac{L+1}{2}\right)^n$
 $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0
 carabiniere



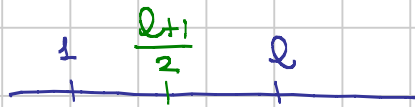
— 0 — 0 —

Teorema rapporto Sia $a_n > 0$.

Se $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$, allora $a_n \rightarrow 0$

Se $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$, allora $a_n \rightarrow \infty$

Dim (nel 2° caso)



Definitivamente $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{l+1}{2}$ Supponiamo vero $\forall n \geq n_0$

Allora per induzione si dimostra che

$$[a_{n_0} \geq \frac{l+1}{2} a_{n_0}; a_{n_0+2} \geq \frac{l+1}{2} a_{n_0+1} \geq \left(\frac{l+1}{2}\right)^2 a_{n_0}; \dots]$$

$$a_n \geq a_{n_0} \underbrace{\left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-n_0}}_{\substack{\downarrow \\ +\infty}}$$

$\downarrow$
per confronto

(verificare per induzione)

— 0 — 0 —

Teorema rapporto $\rightarrow$ radice

Sia $a_n > 0$ una successione.

Allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

① ② ③

Corollario Se esiste il limite del rapporto, allora il primo e l'ultimo sono uguali, allora tutti sono uguali, dunque esiste il limite della radice ed è uguale al precedente.

— 0 — 0 —

Applicazioni ovvie: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ $[a_n = n]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty$$

$[a_n = n!]$

Un po' meno ovvio: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \quad \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} a_n$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \rightarrow e$$

da cui $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$

Esempio in cui esiste il limite della radice, ma non esiste il limite del rapporto

$$a_n = 2, 1, 2, 1, 2, 1, \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1 ; \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 ; \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$$

Dim. rapporto radice (disug. ③)

Ipotesi: $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ Tesi: $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq L$

Dall'ipotesi segue che $\forall \varepsilon > 0$ si ha che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L + \varepsilon$ definitivamente. Diciamo $\forall n \geq n_0$



Da qui per induzione deduciamo che $a_{n_0+1} \leq (L + \varepsilon) a_{n_0}$
 $a_{n_0+2} \leq (L + \varepsilon)^2 a_{n_0}$ e in generale

$$a_n \leq (L + \varepsilon)^{n - n_0} a_{n_0}$$

Facendo la radice n -esima abbiamo che

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \underbrace{(L + \varepsilon)^{\frac{n - n_0}{n}}}_{L + \varepsilon} \underbrace{\sqrt[n]{a_{n_0}}}_{1}$$

questo va dimostrato a parte in altro modo, (qui serve disug. BERNOULLI)

Da questa segue (per confronto) che $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq L + \varepsilon$

Essendo vero $\forall \varepsilon > 0$, è vero anche per $\varepsilon = 0$.