S. ANNA 2010 - LEZIONE 01

Titolo nota 26/01/2010

<u>Terminologia topologica</u> Sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$

Si dice che x è <u>interno</u> ad A se $\exists\, \varepsilon > 0$ t.c. $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A$

" " " " " <u>aderente</u> ad A se $\forall\, \varepsilon > 0$ si ha $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

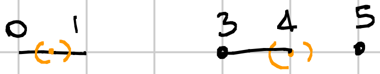
Si dice <u>parte interna</u> di A l'insieme dei punti interni ad A

" " <u>chiusura</u> " " " " " aderenti ad A.

<u>Esempio</u> $A = (0,1) \cup [3,4) \cup \{5\}$

I punti interni (si indica con $\mathring{A}$) : $(0,1) \cup (3,4)$

La chiusura di A (si indica con $\bar{A}$) : $[0,1] \cup [3,4] \cup \{5\}$



Si dice <u>bordo</u> di A (e si indica con ∂A) l'insieme $\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$.

Si caratterizza come l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}$ tali che

$\forall\, \varepsilon > 0$ $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ contiene sia p.ti di A, sia punti non di A.

Nell'esempio : $\partial A = \{0,1,3,4,5\}$ (verificare con def. e caratt.)

Si dice che un p.to $x \in \mathbb{R}$ è un <u>p.to di accumulazione</u> per l'insieme A se $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, y \in A, y \neq x$ tale che $y \in A \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

(detto altrimenti : <u>ogni</u> intorno di x tocca A in un p.to $\neq x$)

Nell'esempio l'insieme dei punti di accumulazione di A è

$[0,1] \cup [3,4]$

<u>Esercizio semplice</u> : l'insieme dei p.ti di accumulazione è dato da i p.ti della chiusura meno i p.ti isolati di A ($x \in A$ si dice isolato se $\exists\, \varepsilon > 0$ t.c. $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A = \{x\}$

Utilità: se uno ha una funzione definita in $A \subseteq \mathbb{R}$, ha senso calcolarne il limite per $x \to x_0$ purché x_0 sia di accumulazione per A.

Oss. La def. di punto di accumulazione si estende in modo ovvio da $\mathbb{R}$ ad $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Ad esempio $+\infty$ è p.to di acc. per $A \Leftrightarrow \sup A = +\infty \Leftrightarrow A$ non è limitato superiormente.

La derivata solitamente si definisce solo nei p.ti interni.

Esercizio istruttivo

① Trovare un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che

$$A, \ \mathring{A}, \ \mathring{\overline{\mathring{A}}}, \ \mathring{\overline{\mathring{A}}}, \ \overline{A}, \ \overline{\mathring{\overline{A}}}, \ \overline{\mathring{\overline{A}}}$$

siano 7 insiemi distinti

② Dimostrare che se continuo ad iterare le operazioni ottengo sempre uno dei 7 precedenti

— o — o — o —

LIMINF e LIMSUP (limite inferiore e limite superiore)

Caso delle successioni.

Linguaggio: si dice che una proprietà di $\mathbb{N}$ vale

* definitivamente se vale da un certo p.to in poi: $\exists M \in \mathbb{N}$ t.c. la proprietà vale $\forall n \geq M$;
* frequentemente se vale infinite volte. Detto altrimenti: $\forall M \in \mathbb{N} \ \exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $n \geq M$ per cui vale.

LIMINF e LIMSUP esistono sempre!

Se a_n ha limite $\in \overline{\mathbb{R}}$, allora quelli sono liminf e limsup.
Se a_n non ha limite, allora brutalmente liminf e limsup sono il più grande ed il più piccolo valore verso cui oscilla.

<u>Esempio 1</u> $a_n = (-1)^n \qquad \liminf_{n\to+\infty} a_n = -1, \quad \limsup_{n\to+\infty} a_n = +1.$

<u>Esempio 2</u> $a_n = [2+(-1)^n]^n \qquad \liminf_{n\to+\infty} = 1, \quad \limsup_{n\to+\infty} = +\infty$

<u>Esempio 3</u> $a_n = \underbrace{\boxed{(-1)^n}}_{\text{vera oscillazione}} + \underbrace{\boxed{\frac{7}{n+(-1)^n}}}_{0} \qquad \liminf_{n\to+\infty} a_n = -1, \quad \limsup_{n\to+\infty} a_n = 1$

<u>Definizione formale</u> Data a_n successione, pongo

$$L_k := \sup\{a_n : n \geq k\} \qquad \ell_k := \inf\{a_n : n \geq k\}$$

È facile dimostrare che L_k è debolmente decrescente ($L_{k+1} \leq L_k$)
ℓ_k " " crescente

Quindi esistono:

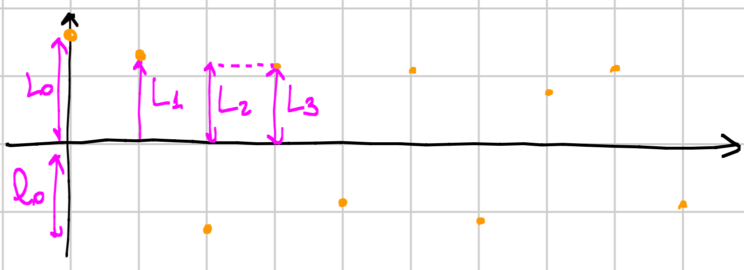
$$\lim_{k\to+\infty} L_k = \limsup_{n\to+\infty} a_n$$

$$\lim_{k\to+\infty} \ell_k = \liminf_{n\to+\infty} a_n$$

Queste definizioni sottintendono il concetto di limite in $\overline{\mathbb{R}}$ (cioè è ammesso che L_k valga $+\infty$ e ℓ_k valga $-\infty$)

Volendo avrei potuto dire:
* Se a_n non è limit. super., allora limsup $= +\infty$, altrimenti faccio il limite degli L_k che sono ora numeri
* Idem per il liminf.

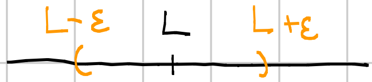
<u>Disegno</u>:



Caratterizzazione con gli ε

$a_n \to \ell$ (limite) se $\forall \varepsilon > 0$ $|a_n - \ell| < \varepsilon$ definitivamente

$\limsup_{n\to+\infty} a_n = L$ se $\forall \varepsilon > 0$



$a_n \leq L+\varepsilon$ definitivamente (perchè $L_k \leq L+\varepsilon$ defin.)

$a_n \geq L-\varepsilon$ frequentemente (perchè $L_k \geq L$ sempre)

Analogamente

$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \ell$ se $\forall \varepsilon > 0$ $a_n \geq \ell-\varepsilon$ definitivamente

$a_n \leq \ell+\varepsilon$ frequentemente

— o — o —

Proprietà banali

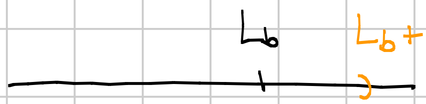
① $\liminf_{n\to+\infty} a_n \leq \limsup_{n\to+\infty} a_n$

② Se vale il segno di uguale, allora c'è il limite, ed il limite è il valore comune. (si uniscono i 2 definitivamente)

③ Se $a_n \leq b_n$ definitivamente, allora

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \leq \liminf_{n\to+\infty} b_n \quad \text{e}$$

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n \leq \limsup_{n\to+\infty} b_n$$



④ $\limsup_{n\to+\infty} a_n = \inf\{k\in\mathbb{R} : a_n \leq k \text{ definitivamente}\}$

$\liminf_{n\to+\infty} b_n = \sup\{k\in\mathbb{R} : a_n \geq k \text{ definitivamente}\}.$

— o — o —