# ANALISI 2 — LEZIONE 056

Note Title 01/12/2017

**Teorema base**

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto connesso.
$\omega$ forma diff. $C^1$ chiusa.
$\gamma_1$ e $\gamma_2$ due curve omotope con gli stessi estremi di classe $C^1$.
Allora
$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

**Dim. per $n=2$** $\quad \omega = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$

Per il lemma misterioso esiste una omotopia abbastanza regolare. Poniamo

$$\Phi(t,s) := (x(t,s), y(t,s))$$

Pongo

$$\varphi(s) := \int \omega \quad \text{sulla curva a } s \text{ fisso, cioè}$$
$$= \int_0^1 [A(x(t,s),y(t,s))\,x_t(t,s) + B(x(t,s),y(t,s))\,y_t(t,s)]\,dt$$

Per $s=0$ viene $\int_{\gamma_1} \omega$ ; per $s=1$ viene $\int_{\gamma_2} \omega$.

Spero che sia $\varphi'(s) = 0$ per ogni $s \in [0,1]$.
Si tratta di derivare un integrale dipendente da parametro.

$$\varphi'(s) = \int_0^1 [A_x x_s x_t + A_y y_s x_t + A x_{ts}$$

$$+ B_x x_s y_t + B_y y_s y_t + B y_{ts}] \, dt$$

Integro per parti i termini con le derivate seconde.

$$\int_0^1 A x_{ts} \, dt = \int_0^1 A (x_s)_t$$

$$= -\int_0^1 \frac{d}{dt} A \cdot x_s + [A x_s]_{t=0}^{t=1}$$

gli estremi sono fissi

$$= -\int_0^1 A_x x_t x_s + A_y y_t x_s$$

Analogamente

$$\int_0^1 B y_{ts} \, dt = \int_0^1 B (y_s)_t \, dt$$

$$= -\int_0^1 \frac{d}{dt} B \cdot y_s + [B y_s]_0^1$$

$$= -\int_0^1 B_x x_t y_s + B_y y_t y_s$$

Mettendo tutto insieme viene

$$\varphi'(s) = \int_0^1 A_x \cancel{x_s} x_t + A_y \cancel{y_s x_t} - A_x \cancel{x_t x_s} - A_y \cancel{y_t x_s}$$

$$+ B_x \cancel{x_s y_t} + B_y \cancel{y_s y_t} - B_x \cancel{x_t y_s} - B_y \cancel{y_t y_s}$$

$$= 0$$

$\boxed{\text{Dim. in dim. } n}$ Ora l'omotopia la indico con $\Phi(t,s)$ e le sue componenti con $\Phi_i(t,s)$.

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} A_i(x)\, dx_i$$

$$\varphi(s) := \int_0^1 \Big[ \sum_{i=1}^{n} A_i(\Phi(t,s))\, \Phi_{i,t}(t,s) \Big] dt$$

$$\varphi'(s) = \int_0^1 \Big[ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A_i}{\partial x_j}(\Phi)\, \Phi_{j,s}\, \Phi_{i,t} + \sum_{i=1}^{n} A_i(\Phi)\, \Phi_{i,ts} \Big] dt$$

Integro per parti gli addendi della seconda sommatoria

$$\int_0^1 A_i(\Phi)\, \Phi_{i,ts}\, dt = \int_0^1 A_i(\Phi)\, (\Phi_{i,s})_t\, dt$$

$$= - \int_0^1 \frac{d}{dt} A_i(\Phi) \cdot \Phi_{i,s}\, dt + \big[ A_i(\Phi) \cdot \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{\Phi_{i,s}} \big]_{t=0}^{t=1}$$

$$= - \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A_i}{\partial x_j}(\Phi)\, \Phi_{j,t} \cdot \Phi_{i,s}\, dt$$

Andando a sostituire diventa

$$\varphi'(s) = \int_0^1 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A_i}{\partial x_j}(\Phi)}\, \Phi_{j,s}\, \Phi_{i,t} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A_i}{\partial x_j}(\Phi)\, \Phi_{j,t} \cdot \Phi_{i,s}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial A_j}{\partial x_i}(\Phi)}\, \Phi_{i,t} \cdot \Phi_{j,s}$$

uguali perché la forma è chiusa.

— o — o —

LA SOLITA Consideriamo la forma diff.

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Dico che è chiusa, ma non esatta.

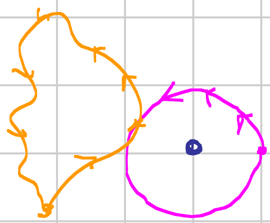
Dim. che è chiusa

$$A_y = -\frac{(x^2+y^2) - 2y\cdot y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$B_x = \frac{(x^2+y^2) - 2x\cdot x}{(\ldots)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Dimostro che non è esatta Basta trovare una curva chiusa sulla quale l'integrale viene $\neq 0$.

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \qquad t \in [0, 2\pi]$

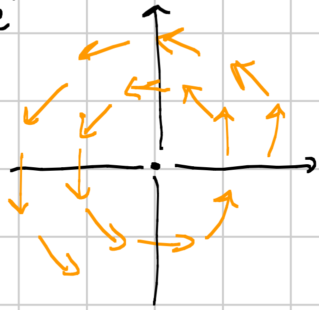


$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} -\frac{\sin t}{1}(-\sin t) + \frac{\cos t}{1}\cdot \cos t$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi.$$

l'int. su questa viene 0, perchè omotopa a curva costante.

Oss. Il campo vettoriale associato alla solita è il campo tangente alle circ. con centro nell'origine.



Oss. generale ciclistica Se faccio un giro in bici e ho sempre vento contrario, posso dire che il campo del vento non è gradiente di un potenziale.

Se il vento è contrario, il prod. scalare tra campo e $\dot{\gamma}$ è sempre negativo, quindi $\int_\gamma \omega < 0 \Rightarrow$ NO esattezza.

La solita ammette primitiva? Dipende da dove la cerco.
Ammette una primitiva
- per $x>0$, per $x<0$, per $y>0$, per $y<0$
- su $\mathbb{R}^2 \setminus$ semiasse positivo degli $x$.

(Basta osservare che è chiusa e sono insiemi sempl. conn.)

Una primitiva per $x>0$ è $V(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

$$V_x = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}$$ e idem $V_y$ funziona!

Una primitiva per $y>0$ è $V(x,y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$

$$V_x = \frac{-1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$ e idem $V_y$ funziona

La prima funziona anche per $x<0$, la seconda per $y<0$.

In qualunque quadrante funzionano entrambe e infatti la loro diff. è costante

$$\arctan \frac{y}{x} + \arctan \frac{x}{y} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{se } x \text{ e } y \text{ concordi}$$

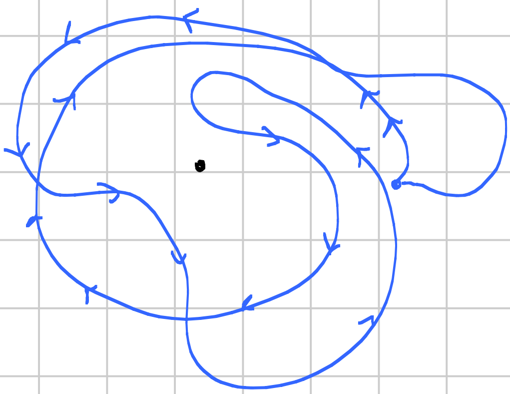
$$\arctan \alpha + \arctan \frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{per } \alpha > 0 \quad \text{(Precorso!)}$$

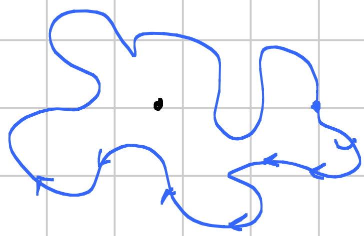
Chi è primitiva su 1°, 2° e 3° quadrante?

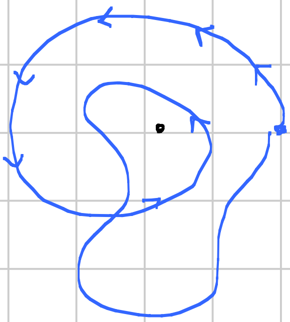
$$V(x,y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{sul } 1° \text{ e } 2° \\ -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\pi}{2} & \text{sul } 2° \text{ e } 3° \end{cases}$$

scegliere la costante che le fa coincidere sul 2°

<u>Esempio</u> $\omega$ = la solita



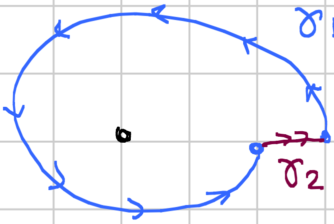




$\int_{\gamma_1} \omega = 0$ (è omotopa alla curva costante)

$\int_{\gamma_2} \omega = -2\pi$ (è omotopa a − circ. classica)

$\int_{\gamma_3} \omega = 4\pi$ (è omotopa a 2 volte la circ. classica)




$\int_{\gamma_1 \circ \gamma_2} \omega = 2\pi$

$\int_{\gamma_2} \omega = 0$ (verifica)

$\Rightarrow \int_{\gamma_1} \omega = 2\pi$

La solita è tale perché "c'è solo lei"

Sia $\omega_S$ la solita. Sia $\omega$ una forma diff. chiusa su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Allora

$$\omega = c\,\omega_S + \underset{\uparrow\,\text{esatta}}{\omega_E}$$

<u>Dim.</u> Basta dim. che esiste $c \in \mathbb{R}$ t.c. $\omega - c\,\omega_S$ è esatta.
È chiusa per ogni valore di c.
Devo trovare c in modo che $\int_\gamma (\omega - c\,\omega_S) = 0$

su tutte le $\gamma$ chiuse.

Alla fine basta verificarlo sulla circ. che fa un giro.
Questo determina c univocamente.

— o — o —